

---

## **Partie I**

# **Généralités sur la marée**



## Chapitre 2

# Historique sur les marées océaniques

### 2.1 Présentation du chapitre

---

Depuis très longtemps, les marées océaniques sont observées sur notre planète. Nous nous proposons de présenter dans ce chapitre un bref aperçu de l'histoire de la découverte, de l'explication scientifique et de la modélisation de ces marées de l'Antiquité à nos jours.

### 2.2 Historique

---

#### 2.2.1 L'Antiquité

Les premières civilisations développent rapidement des activités maritimes, guerrières et marchandes le long des côtes habitées de la Méditerranée. Ainsi, les marins phéniciens et égyptiens, puis grecs et enfin romains et arabes se limitent aux côtes méditerranéennes, berceau maritime de l'humanité. En mer Méditerranée, les marées sont peu importantes. C'est pourquoi ces différents peuples ne sont pas confrontés immédiatement à ce phénomène naturel océanique. Puis, les progrès dans le domaine de la navigation se faisant et les conquêtes armées aidant, ils s'aventurent plus loin le long des côtes de l'Atlantique, dans la Mer Rouge et jusque dans l'Océan Indien. Dans ces zones, les marées sont beaucoup plus importantes et les marins et navigateurs de l'antiquité ne peuvent que les constater.

C'est pourquoi plusieurs observations et mesures des variations du niveau de la mer sont faites. Puis quelques explications sur ce phénomène de montées et descentes des eaux voient le jour. Plusieurs navigateurs et scientifiques grecs et romains le mentionnent et essayent, avec plus ou moins de succès, de l'expliquer dans des écrits qui nous sont parvenus. En 425 avant J.C., le premier historien grec *Hérodote* (~484-425 av. J.C.) décrit le phénomène des marées dans le

Golfe de Suez. Pour le philosophe grec *Platon* (~428-~348 av. J.C.) les marées sont dues aux oscillations périodiques au sein même de la Terre. Le voyageur grec *Pythéas* (~380-~310 av. J.C.), né à Marseille, explore les côtes septentrionales de l'Europe et effectue plusieurs voyages dans les îles britanniques. Durant ces voyages, il comprend qu'il y a un lien entre les marées et la Lune. Il note même que deux marées basses et deux marées hautes ont lieu tous les jours environ. Le disciple de *Platon*, *Aristote* (~385-348 av. J.C.), signale des marées le long des côtes espagnoles en 324 avant J.C. En 150 avant J.C., l'astronome grec *Seleucus* (~190- ? av. J.C.) fervent partisan de l'hypothèse héliocentrique du système solaire, explique l'amplitude de la marée en fonction de la déclinaison de la Lune après de nombreuses observations en Mer Rouge. Les notions de bases divulguées par ces scientifiques sont reprises et développées pendant plusieurs siècles. Ainsi, l'historien et géographe grec *Strabon* (~63-~25 av. J.C.) semble comprendre que les marnages sont la conséquence de deux astres à la fois : la Lune et le Soleil. Le romain *Pline l'Ancien* (23-79), vers 77 après J.C., est le premier à proposer que les marées sont causées par la Lune et le Soleil qui agissent sur les eaux des mers et des océans. En outre, il constate que les marées de vive-eau apparaissent après les pleines lunes et les nouvelles lunes quand la 'force créée par la Lune' est maximale.

### 2.2.2 La période obscure

Malgré tout, les connaissances des pionniers scientifiques restent balbutiantes et durant les quinze premiers siècles de notre ère, les progrès en matière d'explications des marées sont faibles. Il faut cependant noter que quelques astronomes et navigateurs se penchent sur la question. Au début du premier millénaire, les Vikings réalisent très rapidement que la connaissance des hautes et des basses mers le long des côtes qu'ils visitent leur permet de conquérir plus aisément les contrées lointaines. Ils font alors de nombreuses observations de la marée. Mais celles-ci sont la plupart du temps échangées verbalement et laissent très peu de preuves de leur existence dans la littérature maritime scandinave. Depuis longtemps investies dans les échanges maritimes, les civilisations arabes développent considérablement les moyens de navigation et les progrès qui leur sont associés. En plus de la mise au point de la navigation grâce aux étoiles, ils se transmettent entre navigateurs de petits almanachs de marées qui facilitent la navigation dans les petits fonds et à l'entrée dans les ports. Dans son œuvre, *Saint Augustin* mentionne, au 13<sup>ème</sup> siècle, l'action directe de la Lune sur les marées. Mais il ne donne pas d'explication satisfaisante du phénomène. Quelques années plus tard *Dante* (1265-1321), le père de la poésie italienne, cite le même phénomène dans un de ses poèmes.

### 2.2.3 La révolution newtonienne

Il faut attendre le 16<sup>ème</sup> siècle pour connaître un véritable début à l'explication de l'origine des marées. L'astronome allemand *Kepler* (1571-1630), probablement inspiré par la récente découverte du magnétisme terrestre, développe le concept d'une force génératrice de la Lune qui engendrerait le phénomène des marées. Cependant, il abandonne rapidement cette idée, peut-être à cause de la nouvelle théorie du physicien et astronome *Galilée* (1564-1642). Celui-ci soutient fermement la théorie de rotation de la Terre de l'astronome polonais *Copernic* (1473-1543) et pense que c'est la rotation terrestre qui, combinée à son mouvement orbital autour du Soleil, engendre des oscillations des masses d'eau des océans, générant ainsi les marées. Le philosophe et mathématicien français *Descartes* (1596-1659), très influencé par l'idée d'une force génératrice lunaire des marées, explique que la Lune et la Terre sont chacune entourées d'un grand tourbillon d'air qui exerce l'un sur l'autre une pression modifiant périodiquement l'élévation du niveau de la mer. Le mathématicien anglais *Wallis* (1642-1727) reprend la théorie de *Galilée* en ajoutant l'influence de la Lune qui crée les marées par le mouvement du centre de gravité du système Terre - Lune.

Finalement, le savant anglais *Newton* (1642-1727) propose en 1687 sa théorie de la gravitation dans son ouvrage 'Philosophiae naturalis principia mathematica'. Il pose les bases de toutes les études ultérieures faites sur les marées. Il énonce que la Lune par sa proximité, et le Soleil par sa masse, sont les deux seuls astres perturbateurs engendrant les marées. Ils exercent une force d'attraction sur toutes les particules qui composent l'eau des océans. La différence de cette force avec l'attraction qu'ils exercent au centre de la Terre est la force génératrice des marées. En considérant un système à trois corps, Newton parvient à donner l'expression de cette force pour toutes les particules liquides de la Terre en fonction de leur position par rapport aux deux astres perturbateurs. Enfin, il relie la force génératrice des marées aux variations du niveau des océans en développant la *théorie statique des marées* qui suppose qu'à tout instant la surface des océans est dans une position d'équilibre dépendant de la position des astres. Cependant, seule cette dernière théorie s'avérera incomplète pour expliquer le phénomène des marées. En effet, elle ne tient pas compte de la rapidité de mouvement des astres ainsi que de l'inertie des masses liquides déplacées par la force génératrice. Mais son approche a le grand mérite d'expliquer la périodicité semi-diurne de la force génératrice avec des inégalités diurnes, caractéristiques qui se retrouvent dans la périodicité des marées.

Un siècle plus tard, l'hydraulicien français *D. Bernoulli* (1700-1782) reprend les travaux de Newton. Mais, ne prenant pas en compte non plus les forces d'inertie qui apparaissent au cours du phénomène des marées, il ne parvient pas à donner d'explication plus satisfaisante de l'origine des marées.

### 2.2.4 La théorie dynamique

C'est en 1775 que le mathématicien français *Laplace* (1749-1827) propose une explication correcte de la génération des marées avec son traité 'La Mécanique Céleste' et sa *théorie dynamique*. En effet, il établit une relation entre l'élévation du niveau des océans et l'angle horaire, la déclinaison de la Lune et les distances aux astres perturbateurs (*formule de Laplace*). La réponse des océans à l'excitation de la force génératrice prend la forme d'ondes qui se propagent sur toute la surface maritime. Ces ondes se déplacent plus ou moins rapidement suivant que le fond des océans est respectivement profond ou non. Elles sont, comme toutes les ondes, réfléchies, réfractées ou dissipées suivant le milieu. En outre, Laplace montre que la marée réelle est proportionnelle à la marée théorique définie par la marée statique et qu'elle est déphasée, en calculant des coefficients caractéristiques de ces phénomènes. Ces coefficients proportionnels et ces déphasages sont fonctions du lieu c'est-à-dire qu'ils sont dépendants du profil hydraulique et donc de la forme du fond marin et des côtes. Laplace est à même de les déterminer expérimentalement pour chaque port. Les formules de détermination de la marée s'appuient sur l'*hypothèse de linéarité* reposant sur deux principes de la théorie ondulatoire. Le premier principe énonce qu'un système soumis à une force périodique oscille à la même période que cette force (*principe des oscillations forcées*). Le second dit que le mouvement total d'un système soumis à plusieurs petites forces est égal à la somme des mouvements élémentaires dus à chacune de ces forces (*principe de la superposition des petits mouvements*). Même si ces principes ne sont pas rigoureusement applicables au cas des marées, ils en donnent une représentation telle que les formules vont permettre à Laplace de donner jour aux premières prédictions de marées. En effet, grâce aux observations marégraphiques (en particulier celles du marégraphe de Brest, le premier mis en place au monde), le premier 'Annuaire des marées, ports de France' paraît en 1839 grâce à l'instigation de l'ingénieur hydrographe français *Chazallon*.

### 2.2.5 L'analyse harmonique

Cependant, la prédiction des marées à fortes inégalités diurnes est mal décrite par la théorie dynamique. C'est pourquoi, l'anglais *Thomson* (1824-1907), futur *lord Kelvin*, introduit la notion d'*analyse harmonique* pour le traitement des données en 1869, suite à une demande de la 'British Association for the Advancement of Science'. Cette analyse mathématique s'appuie sur la décomposition du potentiel de la force génératrice des marées en une somme de termes périodiques. Il admet ainsi qu'à chaque composante obtenue correspond une amplitude et une phase de la marée donnée par l'analyse harmonique de la courbe de marée. De plus, il invente une machine mécanique pour prédire la marée : le 'Tide Predictor'. Cette machine effectue mécaniquement la somme de tous les termes périodiques en fonction du temps considéré. Les anglais *J.C. Adams* (1819-1892) et *G.H. Darwin* (1845-1912) sont les premiers en 1883 à

donner un développement quasi harmonique du potentiel générateur en fonctions sinusoïdales du temps. Ce développement n'est pas rigoureusement harmonique car il contient des pseudo constantes très lentement variables dans le temps. Enfin, en s'appuyant sur la théorie lunaire de *E.W. Brown* (1866-1938), *A.T. Doodson* (1890-1968) propose en 1921 le premier développement véritablement harmonique du potentiel générateur.

### **2.2.6 Les améliorations de la prédiction de marée**

Cependant la formule de Laplace et l'analyse harmonique qui lui est associée ne permettent de prédire la marée qu'aux endroits où elle peut-être mesurée. La compréhension et la modélisation de la marée en dehors de ces points de mesures sont donc nécessaires pour accéder à une représentation de la marée à l'échelle globale.

A la fin du 19<sup>ème</sup> siècle le physicien américain *R.A. Harris* (1863-1918) et le mathématicien anglais *S.S. Hough* (1870-1923) introduisent le phénomène de résonance des bassins océaniques. Cela améliore l'explication de la génération des marées aux différents endroits de la Terre en prenant en compte la géométrie des océans. Le mathématicien français *H. Poincaré* (1854-1912) propose des solutions analytiques et théoriques des ondes de marées pour des océans séparés par des continents. Cependant, le calcul de ces solutions est beaucoup trop complexe à résoudre mathématiquement. Des modèles de propagation pour calculer la marée sont donc développés en se basant sur l'analyse de données marégraphiques disponibles et sur des considérations empiriques, telles celles de l'allemand *G. Dietrich* (1911-1972) en 1944 ou celles du français *Villain* en 1952.

En 1957 le physicien américain *P. Schureman* (1876-1959) reprend et complète le développement du potentiel générateur de *Doodson* afin d'améliorer la prédiction des marées. Enfin, en utilisant des méthodes d'analyse complètement différentes basées sur de nouveaux paramètres, *Cartwright* et *Taylor* calculent en 1971 un nouveau développement du potentiel générateur qui confirme les résultats obtenus cinquante ans auparavant par *Doodson*.

### **2.2.7 Les modèles numériques et l'altimétrie jusqu'en 1997**

L'introduction de méthodes numériques et l'apparition des ordinateurs après la seconde guerre mondiale permet d'envisager de nouveaux moyens scientifiques pour calculer la marée à l'échelle globale. Cependant, les premiers modèles comme ceux de *Bogdanov* et *Magarik* (1967), *Pekeris* et *Accad* (1969), *Hendershott* (1972) *Zahel* (1977) et *Parke* [1972; 1980] fournissent des solutions très différentes les unes des autres. Ces différences montrent qu'il faut prendre en compte des paramètres jusque-là négligés (comme la marée terrestre) et améliorer les

paramètres d'entrée des modèles (comme la bathymétrie ou le frottement). En 1980, *Schwiderski* propose le premier modèle hydrodynamique numérique de marée à l'échelle du degré qui fournit des solutions à l'échelle mondiale pour les composantes principales du spectre de marée. A partir de 1975, plusieurs satellites ayant à leur bord des altimètres, sont envoyés en orbite autour de la Terre : Geos-3 (1975-78), Seasat (1985), Geosat (1985-89), ERS-1 (1991-), TOPEX/Poséidon (1992-), ERS-2 (1994-)... Leurs mesures sont d'une qualité et d'une couverture sans précédent et permettent à de nouveaux types de calcul de solutions de marée de voir le jour. Ainsi, *Mazzega* (1985), *Cartwright* et *Ray* (1989) et *Francis* et *Mazzega* (1990) tirent partie des missions Seasat et Geosat pour calculer leurs solutions. En 1994, *Le Provost* propose un modèle global hydrodynamique de grande précision indépendant de la mesure altimétrique. Mais ce sont surtout les données du satellite TOPEX/Poséidon qui sont majoritairement utilisées par la communauté scientifique comme nouveaux éléments de mesures. De nombreux modèles globaux de marée sont alors développés, tels ceux de *Eanes* (CSR3.0), *Ray* (RSC94) et *Egbert* (TPXO.2) en 1994 et ceux de *Desai* et *Wahr* (DW95.1), *Kantha* (KAN95), *Le Provost* (FES95.2), *Matsumoto* (ORI95) et *Schrama* et *Ray* (SR95) en 1995.

Pour tout lecteur qui voudrait approfondir l'histoire des marées océaniques au cours des siècles, nous lui laissons le soin de se reporter à l'ouvrage unique et très complet de *D.E. Cartwright* [1999].

## Chapitre 3

# Origine des marées océaniques

### 3.1 Présentation du chapitre

---

Comme nous pouvons le constater dans le chapitre précédent, entre les observations et les premières explications satisfaisantes du phénomène des marées océaniques, plus de deux millénaires se sont écoulés. De nombreux scientifiques ont progressivement déterminé ce que l'on entend par 'marée océanique' et ce qui en est l'origine. Dans ce chapitre, nous nous proposons de définir ce qu'est la marée océanique d'origine astronomique ainsi que les termes usuels qui permettent de la qualifier. Puis, nous verrons qu'une force génératrice engendre cette marée et nous la quantifierons mathématiquement. Nous décrirons alors les moyens de déterminer l'élévation des océans qu'engendre cette force. Enfin, nous préciserons quelles sont les périodicités associées à la marée océanique sur la surface océanique de la Terre.

### 3.2 Définitions

---

#### 3.2.1 La marée océanique d'origine astronomique et les autres marées

La *marée océanique d'origine astronomique* est définie comme étant la variation à allure périodique du niveau des océans due aux seules actions des corps célestes qui se déplacent autour de la Terre. C'est le mouvement relatif apparent de ces corps célestes par rapport à la Terre qui, combiné à la rotation de la Terre sur elle-même, génère des forces d'attraction gravitationnelle périodiques entraînant un déplacement périodique et ondulatoire des masses d'eaux océaniques.

Il existe d'autres types de marées que les marées océaniques. Ainsi, les *marées atmosphériques* sont des déplacements ondulatoires des masses d'air de notre atmosphère et les *marées*

*terrestres* sont des déformations périodiques de la croûte terrestre. Ces deux marées se font au même rythme que celui des marées océaniques et sont aussi générées par le mouvement des astres. Mais il existe d'autres marées qui ne sont pas d'origine astronomique. Les *seiches* apparaissent dans des bassins de géométrie particulière et sont générées par le vent ou les variations de pression atmosphérique qui engendrent des oscillations de la surface (ce phénomène a souvent lieu dans des lacs). La *marée radiationnelle* provient de la dilatation des eaux de surface des océans due aux alternances jour/nuit cycliques qui réchauffent ou refroidissent l'eau. Les *marées météorologiques* sont créées par les variations périodiques de vents alternatifs (tels la mousson ou les vents solaires) ou par les variations de pression atmosphérique. Cependant, le but de notre travail étant l'étude des marées océaniques, nous désignerons dans la suite la marée océanique par le terme de 'marée'. Dans le cas contraire, nous préciserons le type de marée.

Il est particulièrement important de faire ressortir la principale caractéristique de la marée : la rigoureuse périodicité du phénomène. En effet, le mouvement des astres étant la cause de la marée et leurs déplacements périodiques étant parfaitement connus, la périodicité des élévations du niveau des océans due à la marée est, elle aussi, connue. Comme nous le verrons plus loin, cette caractéristique permet l'analyse harmonique de la marée.

### 3.2.2 Quelques termes courants

Plusieurs termes courants permettent de mieux définir les états de la marée en fonction de son évolution au cours du temps : son tracé donne la *courbe de marée* (cf. Figure 3). Le niveau des océans et des mers varie le long des côtes au cours du temps. Quand il monte, on parle de *flot*, (ou *flux* ou *montant*) jusqu'à un niveau maximum, la *pleine mer*. Quand il descend on parle de *jusant* (ou *reflux* ou *perdant*) jusqu'à un niveau minimum, la *basse mer*. La différence de hauteur entre une basse mer et une pleine mer consécutive est le *marnage*. Le marnage est maximal après les *syzygies* (nouvelles et pleines lunes) : c'est la *vive-eau*. Puis il diminue durant le *déchet* jusqu'aux *quadratures* (périodes intermédiaires entre les nouvelles et les pleines lunes) pour former la *morte-eau*. Puis le marnage augmente à nouveau durant le *revif*. L'écart de temps entre une vive-eau et une syzygie, de même qu'entre une morte-eau et une quadrature, est approximativement constant : c'est l'*âge de la marée*.

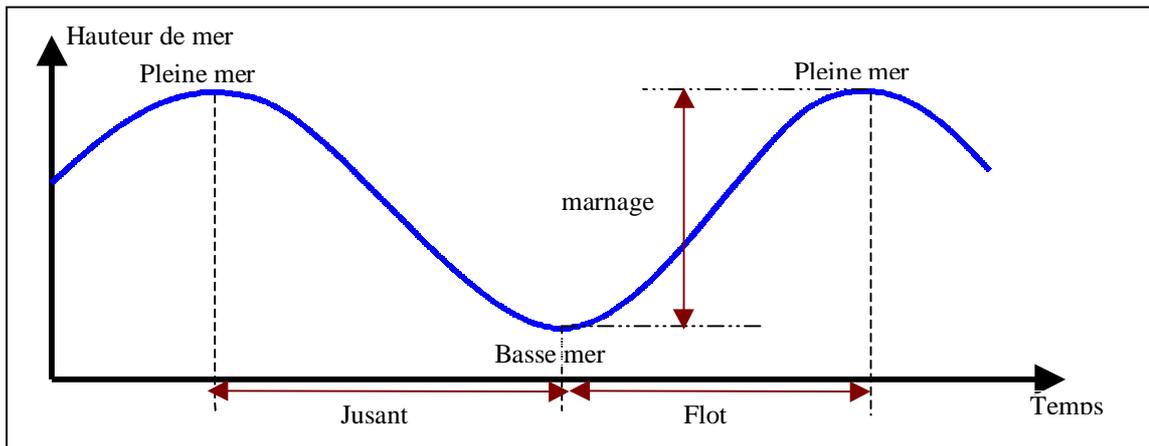


Figure 3 : Courbe de marée

### 3.3 La force génératrice des marées

Comme nous l'avons souligné plus haut, l'étude des marées revient à s'intéresser aux mouvements des particules liquides des océans et des mers du globe terrestre dans un repère de coordonnées géocentriques. En effet, ces particules sont à la fois soumises aux forces gravitationnelles de l'attraction terrestre et aux forces d'attraction des astres en révolution autour de la Terre. Ces astres qui sont la cause des marées sont nommés *astres perturbateurs*. Les forces qu'ils exercent sur les particules d'eau entraînent des variations du niveau des océans et des mers du globe qui varient dans le temps et qui forment les ondes de propagation de la marée.

#### 3.3.1 Expression de la force génératrice

Dans notre étude des marées océaniques, nous supposerons que l'élément fluide qui constitue les océans est de l'eau incompressible composée de particules en mouvement dans le repère tangentiel direct copernicien  $\mathfrak{R}_{xyz}$  que nous désignerons plus simplement par  $\mathfrak{R}$ .

L'origine de  $\mathfrak{R}$  est le centre T de la Terre et ses axes ont des directions fixes par rapport aux étoiles supposées fixes. L'axe en z est pris comme étant l'axe des pôles. Plaçons-nous dans ce repère  $\mathfrak{R}$  lié à la Terre et déterminons le mouvement d'une particule P de masse m à la surface de la Terre, soumise aux forces d'origines terrestre et astronomique. Considérons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le vecteur vitesse de rotation  $\mathbf{\Omega}$  reste constant en direction, en sens (axe des pôles fixe) et en intensité (vitesse de rotation constante) ;
- la Terre est assimilable à une sphère indéformable de centre T.

Dans ce cas,  $\mathfrak{R}$  est animé :

- d'un mouvement de translation identique à celui d'une particule ponctuelle positionnée au centre de la Terre et de masse celle de la Terre ;
- d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles.

Les équations de la mécanique du point nous donnent l'accélération relative  $\gamma_r$  d'un point  $P$  de masse  $m$  à la surface de la Terre dans  $\mathfrak{R}$  :

$$m\gamma_r(P) = mg(P) + \mathbf{F}_A(P) - (\mathbf{F}_A(T) - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{TP})) - 2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_R(P) \quad (3.1)$$

avec :

- $\mathbf{g}$  le champ d'attraction terrestre ;
- $\mathbf{TP}$  : le vecteur de  $T$  à  $P$  ;
- $\mathbf{V}_R$  : la vitesse relative dans  $\mathfrak{R}$  ;
- $\mathbf{F}_A$  : la force d'attraction astronomique.

L'équation (3.1) traduit la loi fondamentale de la mécanique terrestre dans un repère géocentrique.

Le terme qui nous intéresse plus particulièrement est  $\mathbf{F}_A(P) - \mathbf{F}_A(M)$  : il représente la *force génératrice des marées*. Cette force génératrice est donc l'expression d'un différentiel entre la force astronomique qui s'applique sur la particule  $P$  de la part des astres qui tournent autour de la Terre diminuée de la force astronomique qui s'applique au centre de la Terre de la part de ces mêmes astres.

### 3.3.2 Calcul de la force génératrice

#### 3.3.2.1 L'attraction universelle

Les lois de la mécanique newtonienne nous donnent la force d'attraction qu'exerce une particule  $P_1$  de masse  $m_1$  sur une particule  $P_2$  de masse  $m_2$  :

$$\mathbf{F}_{1/2} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{D}_{1/2}}{D_{1/2}^3} \quad (3.2)$$

avec :

- $G$  : la constante de gravitation universelle ;
- $\mathbf{D}_{1/2}$  : le vecteur de direction la ligne passant par  $P_1$  et  $P_2$ , de sens  $P_1$  vers  $P_2$  et de module la distance de  $P_1$  à  $P_2$ .

Pour mémoire, rappelons l'expression de la constante de gravitation universelle en fonction du champ d'attraction terrestre  $g$  :

$$G = g \cdot \frac{a^2}{m_T} = 6,667 \cdot 10^{-24} \text{ s}^{-2}$$

avec :

- $a$  : le rayon de la Terre ;
- $m_T$  : la masse de la Terre

### 3.3.2.2 Le cas particulier des marées

(3.2) représente la loi de l'attraction universelle formulée par *Newton* [1687]. Elle traduit le fait que deux particules s'attirent proportionnellement à leur masse en raison inverse du carré de leur distance.

Dans le degré d'approximation nécessaire au calcul des marées, seuls la Lune et le Soleil ont une influence sur la Terre (le Soleil a une très grande masse et la Lune est proche de la Terre). Les autres planètes ou étoiles qui entourent la Terre sont trop éloignées ou de masses trop faibles pour être prises en considération. La seule résultante newtonienne qui agit sur la Terre n'est due qu'au Soleil et à la Lune dans l'étude des marées.

Considérons les deux astres, Terre et Lune ou Terre et Soleil. Etant donné que les distances les séparant sont de plusieurs ordres de grandeur supérieurs à leur diamètre respectif (cf. Tableau 2), nous pouvons considérer que les astres sont ponctuels et donc que la loi de Newton peut leur être appliquée. Ainsi :

- pour la Terre et la Lune :  $\mathbf{F}_{LT} = -Gm_L m_T \frac{\mathbf{D}_{LT}}{D_{L/T}^3}$  ;
- pour la Terre et le Soleil :  $\mathbf{F}_{ST} = -Gm_S m_T \frac{\mathbf{D}_{ST}}{D_{S/T}^3}$  ;

avec :

- $m_S, m_L, m_T$  les masses respectives du Soleil, de la Lune et de la Terre ;

- $\mathbf{D}_{S/T}$  le vecteur allant du centre S du Soleil au centre T de la Terre ;
- $\mathbf{D}_{L/T}$  le vecteur allant du centre L de la Lune au centre T de la Terre.

Pour information, nous rappelons les valeurs des astres cités ci-dessus dans le Tableau 2.

Astre	Distance Terre/Astre (km)	Rayon équatorial (km)	Masse astre/ Masse Terre
Lune	384400	1738	0,0123
Soleil	149600000	696000	332946
Terre	0	6378	1

**Tableau 2 : Caractéristiques de la Lune et du Soleil par rapport à la Terre**

D'après le paragraphe 3.3.1, la force génératrice des marées qui s'applique en un point P de masse unitaire appartenant à la surface océanique, est égale à la différence des champs d'attraction des astres en ce point et au centre T de la Terre. En considérant tous les astres  $k$  qui gravitent autour de la Terre, nous déduisons de (3.2) la force de génération des marées :

$$\mathbf{F}_{GM} = G \sum_k m_k \left( \frac{\mathbf{v}_k}{r_k^2} - \frac{\mathbf{u}_k}{R_k^2} \right) \quad (3.3)$$

avec :

- $G$  : la constante de gravitation universelle ;
- $m_k$  est la masse de l'astre  $k$  ;
- $\mathbf{u}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  sont les vecteurs unitaires respectifs de **TC** et **PC** (avec T centre de la Terre, C centre de l'astre  $k$  considéré et P la particule à la surface des océans) ;
- $R_k$  et  $r_k$  sont les normes des vecteurs **TC** et **PC**.

La force génératrice des marées d'un système constitué de plusieurs astres qui s'exerce sur une particule de la Terre est égale à la somme des forces génératrices de chacun des astres perturbateurs qui s'exercent sur la particule. Nous pouvons donc décomposer l'étude de cette force générée par plusieurs astres en une étude d'un système de deux corps Terre – astre. Nous obtiendrons la force génératrice totale en additionnant la composante de chaque astre.

Dans (3.3), en ne considérant qu'un seul astre  $k$ ,  $R_k$  et  $\mathbf{u}_k$  ne dépendent que de la position de la Terre et de l'astre perturbateur. Par contre  $r_k$  et  $\mathbf{v}_k$  dépendent de la position de la particule P de masse  $m_k$  qui subit la force génératrice des marées. C'est pourquoi le terme  $-m_k \frac{\mathbf{u}_k}{R_k^2}$

représente la force d'attraction exercée sur une masse  $m_k$  placée au centre de la Terre car elle est

indépendante de la position. Au contraire, le terme  $m_k \frac{v_k}{r_k^2}$  représente la force d'attraction sur la particule P de masse  $m_k$  dépendant de la position de P.

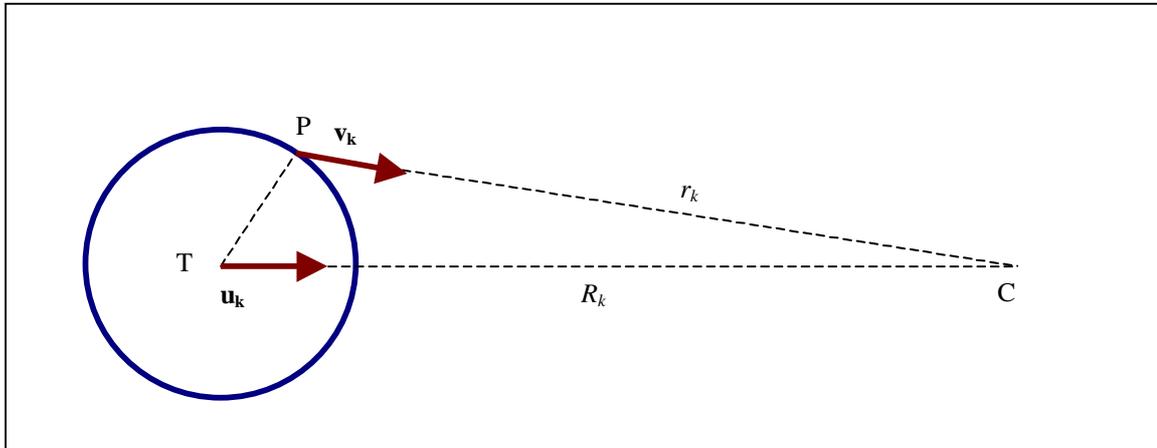


Figure 4 : Direction des forces gravitationnelles par les interactions Terre/astre

La Terre, soumise à la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Lune ou le Soleil, subit donc une accélération dirigée vers cet astre qui engendre une force d'inertie, la *force centrifuge*, appliquée en chaque point de la Terre. Pour une particule située au centre de la Terre, la force centrifuge s'oppose exactement à la force gravitationnelle. Cependant, ailleurs qu'au centre il n'y a pas d'équilibre. La force gravitationnelle varie avec le carré de la distance séparant un point de la Terre avec l'astre perturbateur. La Terre et la Lune (ou la Terre et le Soleil) ont un mouvement de translation circulaire, c'est pourquoi, la force centrifuge, reste la même en tout point du globe [Dronkers, 1964]. La force différentielle est la force génératrice des marées.

### 3.3.2.3 Direction et module

Par une construction géométrique simple [Bessero, 1985], nous allons déterminer la direction et le module de la force génératrice des marées pour un astre perturbateur.

Soit  $A_1$  et  $A_3$  deux points de (TC) et  $A_2$  et  $A_3$  deux points de (PC) construits tels que :

- l'arc de cercle  $PA_1C$  soit de centre C et de rayon PC soit  $r_k$  ;
- la droite  $(A_1A_2)$  soit parallèle à (PT) ;
- l'arc de cercle  $A_2A_3$  soit de centre C et de rayon  $A_2C$  ;
- la droite  $(A_3A_4)$  soit parallèle à  $(A_1A_2)$  ;
- l'arc de cercle  $A_4CP'$  soit de centre C et de rayon  $A_4C$ .

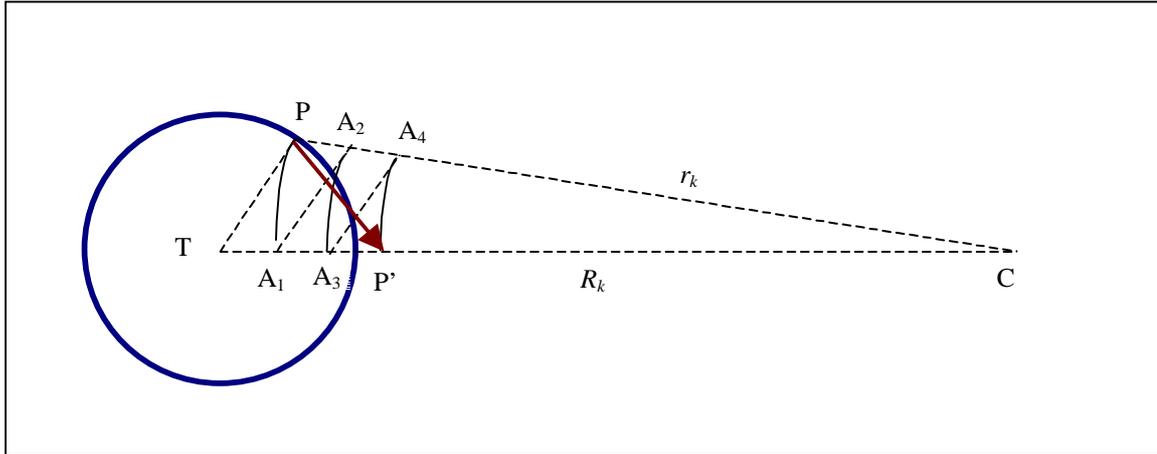


Figure 5 : Construction géométrique de la force génératrice de marée

Donc nous avons par construction :

$$CP' = CA_4, CA_3 = CA_2, CA_1 = CP = r_k,$$

et par le théorème de Thalès :

$$\frac{CA_4}{CP} = \frac{CA_3}{CT} \Rightarrow CP' = CA_4 = CA_3 \frac{r_k}{R_k} \quad \text{et} \quad \frac{CA_2}{CP} = \frac{CA_1}{CT} \Rightarrow CA_2 = CA_1 \frac{r_k}{R_k} = \frac{r_k^2}{R_k}.$$

Comme  $CA_2 = CA_3$  nous avons :  $CP' = \frac{r_k^3}{R_k^2}$ , d'où :

$$\mathbf{PP}' = \mathbf{PC} + \mathbf{CP}' = r_k \mathbf{v}_k - \frac{r_k^3}{R_k^2} \mathbf{u}_k = r_k^3 \left( \frac{\mathbf{v}_k}{r_k^2} - \frac{\mathbf{u}_k}{R_k^2} \right)$$

Aux coefficients multiplicateurs prêts  $r_k^3$  et  $m_k$ , nous reconnaissons l'expression de la force génératrice des marées données par (3.3). Ainsi, en tout point P de la surface des océans, nous savons construire la force génératrice des marées d'un astre  $k$ . Cet astre  $k$  de masse  $m_k$  exerce donc sur une particule P des océans qui est à une distance  $R_k$  du centre est C de l'astre, une force génératrice de marée :

$$\mathbf{F}_{GM} = G \frac{m_k}{R_k^3} \mathbf{PP}' \quad (3.4)$$

Ce tracé se simplifie grâce à la règle de *Proctor* qui, supposant que l'astre  $k$  est à l'infini, entraîne que les arcs de cercle de construction sont des droites parallèles et donc que  $TP' = 3TA_1$ .

### 3.3.2.4 Expression angulaire

Nous allons simplifier l'écriture de (3.4) en exprimant  $\mathbf{PP}'$  en fonction de  $a$  le rayon de la Terre et de l'angle  $\theta$  décrit entre l'axe centre de la Terre - centre de l'astre et l'axe centre de la Terre - point P considéré.  $\theta$  est appelé la *distance zénithale* de l'astre. Par la règle de Proctor citée précédemment, nous avons :  $TP' = 3TA_1 = 3a \cos \theta$ .

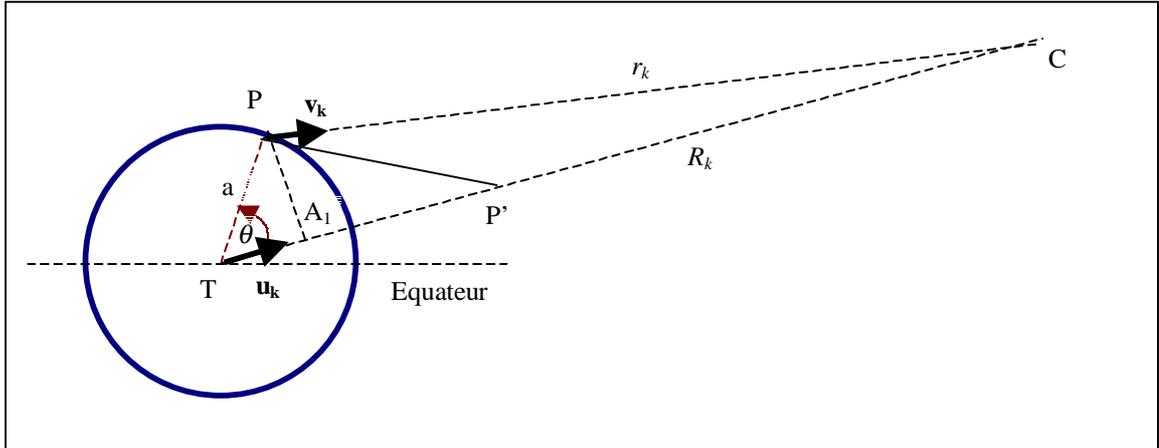


Figure 6 : Expression angulaire de la force génératrice des marées

Par le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle, nous avons :

$$PP'^2 = PA_1^2 + A_1P'^2 = (a \sin \theta)^2 + (3a \cos \theta - a \cos \theta)^2 = a^2 (\cos^2 \theta + 1),$$

d'où l'expression du module de la force génératrice en fonction de  $\theta$  :

$$\|\mathbf{F}_{GM}\| = G \frac{m_k}{R_k^3} a \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1} \quad (3.5)$$

Grâce à cette équation et à la méthode de tracé défini dans le paragraphe 3.3.2.3, nous pouvons définir la surface que prendrait une couche d'eau liquide recouvrant toute la Terre par l'influence d'un astre unique (cf. Figure 7, les proportions sont exagérées pour une meilleure visualisation). Cette surface est symétrique par rapport à l'axe des pôles d'une part et par rapport à l'axe centre de la Terre – centre de l'astre d'autre part. La surface est un ellipsoïde de révolution.

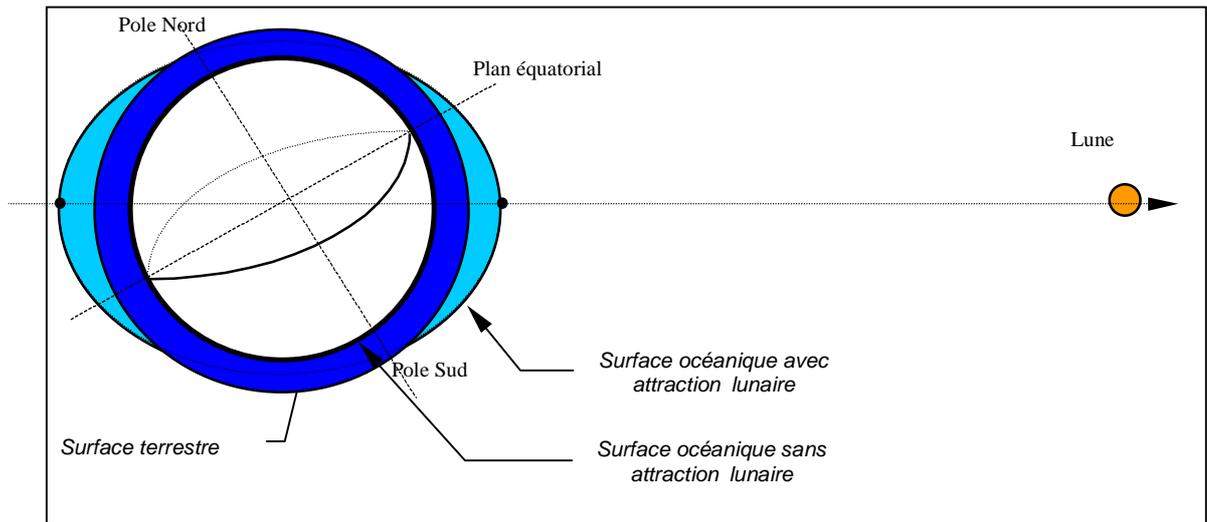


Figure 7 : Surface prise par un océan global due à la force génératrice des marées d'un astre unique

### 3.3.2.5 Cas du système à trois corps Terre – Lune - Soleil

Dans le cas de la Terre, nous avons vu que seules la Lune et le Soleil ont une influence notable sur la génération des marées océaniques. Afin de quantifier la force génératrice des marées sur notre planète, plaçons-nous dans le système à trois corps Terre – Lune – Soleil. (3.4) montre que la force génératrice des marées varie en raison inverse du cube de la distance contrairement à l'attraction gravitationnelle qui varie en raison inverse du carré de la distance. Les valeurs données dans le Tableau 2 permettent de calculer le rapport entre l'influence de la force génératrice des marées due à la Lune et due au Soleil :

$$\frac{\|\mathbf{F}_{GM_{LT}}\|}{\|\mathbf{F}_{GM_{ST}}\|} \approx \frac{G \frac{m_L}{D_{L/T}^3} a}{G \frac{m_S}{D_{S/T}^3} a} = \frac{m_L}{m_S} \left( \frac{D_{S/T}}{D_{L/T}} \right)^3 = 2,17$$

Ainsi, l'action de la Lune est deux fois plus importante que celle du Soleil malgré sa masse considérable : l'effet de distance est prépondérant.

Cependant ces forces différentielles sont infimes. Pour la Lune par exemple :

$$\|\mathbf{F}_{GM_{LT}}\| \approx G \frac{m_L}{D_{L/T}^3} = g \frac{a^2}{m_T} \frac{m_L}{D_{L/T}^3} \approx 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Par un calcul similaire nous avons pour le Soleil :

$$\|\mathbf{F}_{GM_{ST}}\| \approx 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Ainsi, la composante verticale de ces forces différentielles ne modifie que très légèrement l'intensité de la pesanteur, de l'ordre du dix millionnièmes, et leur composante horizontale en altère la direction, d'un angle de l'ordre du centième de seconde sexagésimale. Il est donc remarquable de noter que des forces aussi faibles conduisent à des variations du niveau de la mer aussi spectaculaires que celles que nous observons dans l'océan.

### 3.3.3 Périodicité de la génération des marées

Dans le champ de la force génératrice des marées créé par la Lune et le Soleil, la Terre tourne autour de son axe des pôles, ce qui entraîne une déformation périodique de la surface des océans en fonction de la position de l'axe perturbateur considéré. Plaçons-nous dans le cas du système à deux corps (Terre - Lune par exemple). Considérons  $P_1$  et  $P_2$  deux points de la surface terrestre qui sont à la même latitude mais diamétralement opposés. Construisons la force génératrice des marées en  $P_1$  et  $P_2$  à un temps  $t$  (cas a) et à un temps  $t+dt$  (cas b) tel que la Lune a fait un demi-tour autour de la Terre.

#### 3.3.3.1 Astre perturbateur dans le plan équatorial

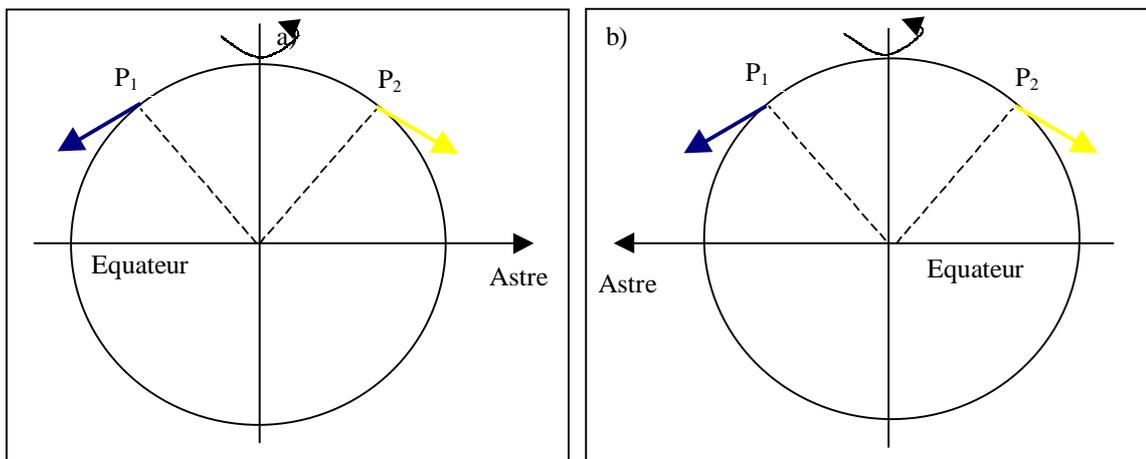
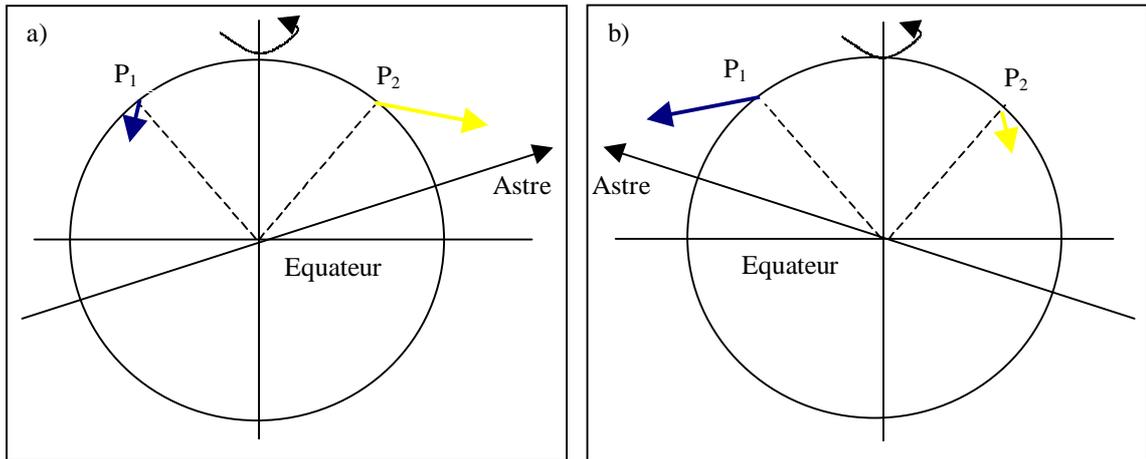


Figure 8 : Force génératrice de marée dans le cas où l'axe perturbateur est dans le plan équatorial

Dans les deux cas la force génératrice en  $P_1$  et en  $P_2$  est identique. La périodicité est donc la durée d'une demi rotation de l'axe perturbateur autour de la Terre. Dans ce cas, la force est dite semi-diurne pure.

#### 3.3.3.2 Astre perturbateur en dehors du plan équatorial



**Figure 9 : Force génératrice de marée dans le cas où l'axe perturbateur est en dehors du plan équatorial**

Dans les deux cas la force génératrice en  $P_1$  et en  $P_2$  n'est plus identique. La force génératrice a toujours une périodicité semi-diurne, mais nous voyons apparaître des fluctuations diurnes dans les minima et les maxima de cette force. La périodicité reste semi-diurne mais avec des inégalités diurnes. Nous avons ainsi l'explication qualitative des variations semi-journalière et journalière constatées des élévations des océans et des mers le long des côtes terrestres.

## Chapitre 4

# Le potentiel générateur des marées

### 4.1 Présentation du chapitre

---

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé la force génératrice des marées exercée par la Lune et le Soleil sur les océans. Nous pouvons chercher un potentiel qui dérive de cette force et l'exprimer en fonction des mouvements des deux astres perturbateurs. Nous verrons que, grâce à des principes de la physique ondulatoire, ce potentiel peut s'exprimer sous forme d'une somme infinie de potentiels élémentaires qui se traduisent tous par la génération d'une onde sinusoïdale élémentaire se propageant dans les océans. Trois développements du potentiel générateur sont présentés et permettent d'introduire les notions de composantes harmoniques de la marée que nous quantifierons et qualifierons pour les principales ondes de la marée.

### 4.2 Expression du potentiel

---

#### 4.2.1 Définition du potentiel d'une force

Par définition, une force  $\mathbf{F}$  dérive d'un potentiel  $\Pi$  si nous pouvons écrire :

$$\mathbf{F} = \nabla\Pi \tag{4.6}$$

Avec  $\nabla$  l'opérateur *nabla* tel que dans les coordonnées cartésiennes d'un repère ( $O_{xyz}$ ) :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}_z$$

et  $\nabla\Pi$  est le gradient de  $\Pi$ .  $\Pi$  est une fonction scalaire.

Le potentiel, défini à une constante près, est égal au travail qu'effectue la force pour déplacer une masse unité d'un point vers un autre, indépendamment du chemin suivi. On montre qu'un champ d'attraction créé par un point matériel P de masse  $m$  dérive d'un potentiel  $\Pi$  fonction de la distance  $r$  entre P et un point considéré :

$$V = G \frac{m}{r} \quad (4.7)$$

Dans le cas de l'étude des marées, le potentiel qui dérive de la force génératrice des marées est appelée *potentiel générateur des marées*. Le gradient est un opérateur linéaire, donc, dans le cas du système à trois corps qui nous intéresse (Terre - Lune - Soleil), nous pouvons décomposer le potentiel astronomique générateur total  $\Pi_A$  en la somme du potentiel générateur lunaire  $\Pi_L$  et du potentiel générateur solaire  $\Pi_S$ . Ainsi, il suffit de déterminer  $\Pi_L$ , par exemple, et  $\Pi_S$  s'en déduit aisément. La somme du potentiel lunaire et du potentiel solaire se nomme *potentiel luni-solaire*.

### 4.2.2 Calcul du potentiel

#### 4.2.2.1 Expression générale du potentiel

Comme nous l'avons vu précédemment nous pouvons simplifier le calcul du potentiel générateur des marées en ne calculant que le potentiel lunaire  $\Pi_L$ . En reprenant les notations introduites dans les paragraphes précédents et qui sont représentées Figure 6, et en exprimant la force génératrice lunaire donnée par (3.3), nous avons grâce à (4.7) [Le Provost, 1973] :

$$\Pi_L = Gm_L \left( \frac{1}{r_L^2} - \frac{a}{R_L^2} \cos \theta_L \right) \quad (4.8)$$

Dans le triangle TCP de la Figure 5, nous avons la relation trigonométrique :  $r_L^2 = a^2 + R_L^2 - 2aR_L \cos \theta_L$ , ce qui permet d'écrire l'inverse de  $r_L$  et le potentiel  $\Pi_A$  en fonction de  $a$ ,  $R_L$  et  $\theta_L$  :

$$\frac{1}{r_L} = \frac{1}{R_L \sqrt{1 - 2 \frac{a}{R_L} \cos \theta_L + \frac{a^2}{R_L^2}}} \quad (4.9)$$

$$\Pi_A = Gm_L \frac{1}{R_L} \left( \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{R_L} \cos \theta_L + \frac{a^2}{R_L^2}}} - \frac{a}{R_L} \cos \theta_L \right) \quad (4.10)$$

#### 4.2.2.2 Décomposition du potentiel en polynômes de Legendre

Le terme  $\frac{a}{R_L}$  est petit devant 1. Dans le cas de la Lune,  $\frac{a}{R_L} \approx 0,0166$  et dans le cas du Soleil

$\frac{a}{R_S} \approx 0,00004$ , donc nous avons :  $-2\frac{a}{R_L} \cos \theta + \frac{a^2}{R_L^2} \ll 1$ , et nous pouvons alors décomposer

(4.9) en une série entière de polynômes de Legendre :

$$\frac{1}{r_L} = \frac{1}{R_L} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta_L) \left( \frac{a}{R_L} \right)^n \quad (4.11)$$

avec  $P_n$  les polynômes de Legendre définis par les relations :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \end{cases} \quad (4.12)$$

Cependant dans notre cadre d'étude, le terme  $\frac{a}{R_L}$  étant petit, il entraîne une diminution très

rapide de l'influence quantitative des polynômes de Legendre avec l'ordre du développement. La contribution du polynôme  $P_2$  représente environ 98% du potentiel lunaire total et une fraction encore plus importante du potentiel solaire total [Le Provost, 1973]. C'est pourquoi, nous nous limitons à l'ordre 2, limite de précision des mesures in situ même si dans certains cas, le développement est utilisé jusqu'à l'ordre 3 [Doodson, 1921; Le Provost, 1973] Les quatre premiers polynômes de Legendre s'écrivent alors en fonction  $\cos \theta_L$  :

$$\begin{cases} P_0(\cos \theta_L) = 1 \\ P_1(\cos \theta_L) = \cos \theta_L \\ P_2(\cos \theta_L) = \frac{3 \cos^2 \theta_L - 1}{2} \\ P_3(\cos \theta_L) = \frac{5 \cos^3 \theta_L - 3 \cos \theta_L}{2} \end{cases} \quad (4.13)$$

Ce qui nous permet après simplifications, puisque le potentiel est défini à une constante près, d'exprimer le potentiel générateur lunaire à l'ordre 3 :

$$\Pi_L = \frac{3}{4} Gm_L \frac{1}{R_L} \left[ \frac{a^2}{R_L^2} \left( \cos^2 \theta_L - \frac{2}{3} \right) + \frac{a^3}{R_L^3} \left( \frac{20}{3} \cos^3 \theta_L - 2 \cos \theta_L \right) \right] \quad (4.14)$$

Ce potentiel ne dépend :

- par  $\theta_L$ , que de la position du point considéré à la surface de la Terre et de la Lune par rapport au centre de la Terre ;
- par  $R_L$ , que de la distance de la lune par rapport au centre de la Terre.

En remplaçant l'indice  $L$  par l'indice  $S$ , nous avons de même pour le potentiel solaire. La somme des deux potentiels est le potentiel luni-solaire.

#### 4.2.2.3 Valeur du potentiel générateur

En reprenant les travaux de *Doodson* [1921], posons les *coefficients géodésiques de Doodson* :

$$c_L = \frac{3}{4} Gm_L \frac{a^2}{R_{0L}^3} \text{ et } c_S = \frac{3}{4} Gm_S \frac{a^2}{R_{0S}^3}$$

avec :

- $R_{0L}$  la distance moyenne de la Terre à la Lune ;
- $R_{0S}$  la distance moyenne de la Terre au Soleil.

L'expression exacte du potentiel après simplifications est :

$$\Pi_A = \frac{4}{3} c_L \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{R_{0L}}{R_L} \right)^{n+1} \left( \frac{a}{R_{0L}} \right)^{n-2} P_n(\cos \theta_L) \right] + \frac{4}{3} c_S \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{R_{0S}}{R_S} \right)^{n+1} \left( \frac{a}{R_{0S}} \right)^{n-2} P_n(\cos \theta_S) \right] \quad (4.15)$$

D'après (4.14) nous pouvons écrire le potentiel luni-solaire à l'ordre 2 :

$$\Pi_A = c_L \left( \frac{R_{0L}}{R_L} \right)^3 \left( \cos^2 \theta_L - \frac{2}{3} \right) + c_S \left( \frac{R_{0S}}{R_S} \right)^3 \left( \cos^2 \theta_S - \frac{2}{3} \right)$$

### 4.2.3 La marée d'équilibre

Par définition, la *marée d'équilibre*, ou *marée statique*, est la marée proportionnelle au gradient du potentiel générateur. Cette marée est formée sur l'hypothétique base d'une Terre sphérique indéformable recouverte d'une fine couche d'eau sans inertie ni viscosité qui représente les océans. Dans ce cas, la surface des océans répond de manière instantanée à toutes les forces génératrices de la marée et acquiert une position d'équilibre. Dans la direction verticale, l'équilibre est hydrostatique. Dans la direction horizontale, la force génératrice est en équilibre avec le gradient de pression généré par la pente de la surface (cf. Figure 7). Le seul potentiel perturbateur pouvant engendrer un déplacement de la surface liquide est le potentiel générateur des marées. Donc le déplacement vertical  $\alpha$  est donné par :

$$\alpha = \frac{\Pi_A}{g} \tag{4.16}$$

Même si la marée statique ne représente pas bien la marée réelle, elle permet d'obtenir une bonne approximation de son ordre de grandeur. Ainsi, l'amplitude de la marée d'équilibre lunaire est au maximum de 54 centimètres, et la marée d'équilibre solaire est au maximum de 25 centimètres [Bessero, 1985]. La marée d'équilibre luni-solaire est donc inférieure à un mètre.

## 4.3 Variation du potentiel en fonction du temps

---

La Lune et le Soleil ne se déplacent pas uniquement dans le plan équatorial terrestre. Ces deux astres suivent des orbites elliptiques qui sont inclinées par rapport au plan équatorial. La *déclinaison* est l'angle que décrit le centre de l'astre avec le centre de la Terre par rapport au plan équatorial. C'est pourquoi, comme nous l'avons vu au paragraphe 3.3.3, la surface des océans se déforme en fonction du temps sous l'influence des variations de la force génératrice des marées et suivant la déclinaison des astres perturbateurs. Les variations de la déclinaison conduisent à une séparation distincte des types de marées. Nous avons déjà cité les phénomènes de *marées semi-diurnes* (paragraphe 3.3.3.1) et *marées diurnes* (paragraphe 3.3.3.2), mais il existe aussi des phénomènes de *marées longues périodes*. Ces phénomènes, comme leurs noms l'indiquent, sont de périodes respectives, la demi-journée, la journée et de périodes plus grandes que la journée. Dans la suite, nous allons développer ces différences suivant les types de marées.

### 4.3.1 Coordonnées horaires des astres perturbateurs

Afin de déterminer la position d'une particule P à la surface de la Terre et la position d'un astre perturbateur par rapport au centre de la Terre, nous introduisons plusieurs notions de géométrie céleste.

Plaçons-nous dans le repère  $\mathcal{R}_{xyz}$  introduit en dans le paragraphe 3.3.1 dont l'origine est le centre de la Terre. L'intersection du plan équatorial avec le plan méridien contenant le méridien de Greenwich est l'axe des x. L'axe des y est dans le plan équatorial et perpendiculaire à l'axe des x. L'axe des z est l'axe des pôles.

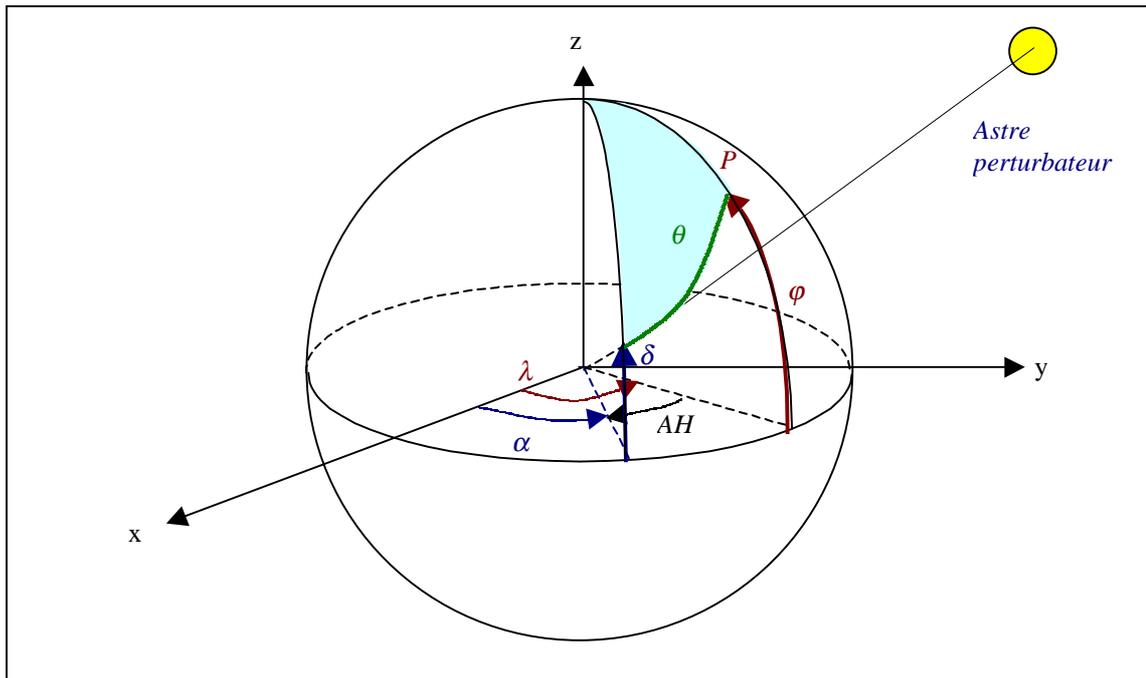


Figure 10 : Coordonnées horaires d'un astre perturbateur

Soit :

- $\alpha$  la longitude et  $\delta$  la latitude (ou déclinaison) de l'astre perturbateur ;
- $\lambda$  la longitude et  $\varphi$  la latitude du point P où s'applique la force génératrice ;
- $AH = \lambda - \alpha$  définit l'angle horaire de l'astre perturbateur par rapport à la rotation de la Terre ;

### 4.3.2 Interprétation du potentiel en coordonnées horaires

En considérant le triangle coloré de la Figure 10, la relation fondamentale de la trigonométrie sphérique nous donne :

$$\cos \theta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos AH \quad (4.17)$$

En reportant (4.17) dans (4.15) et en ne considérant qu'un astre, nous avons après simplifications :

$$\Pi_A = c_L \left( \frac{R_{0L}}{R_L} \right)^3 \left( \begin{array}{l} \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \cos(2AH) + \\ \sin 2\varphi \sin 2\delta \cos AH + \\ \frac{1}{3} (3 \cos^2 \varphi - 1)(3 \cos^2 \delta - 1) \end{array} \right) \quad (4.18)$$

Les trois termes de la somme de (4.18) ont une dépendance différente en fonction de  $AH$ , angle horaire de l'astre perturbateur considéré :

- Le terme  $\cos^2 \varphi \cos^2 \theta \cos(2AH)$ , dépendant de  $2AH$ , est minimum et maximum sur deux méridiens Est opposés de  $90^\circ$  (et leurs complémentaires respectifs à l'Ouest) par révolution de l'astre autour de la Terre. Sa périodicité est donc semi-diurne. Son signe ne dépend que de celui de  $\cos 2AH$ . Donc, sur un même méridien son signe reste constant. On parle de répartition spatiale *sectorielle*.
- Le terme  $\sin 2\varphi \sin 2\delta \cos AH$ , dépendant de  $AH$ , n'est qu'une fois minimum et maximum sur un méridien Est (et son complémentaire à l'Ouest) par révolution de l'astre autour de la Terre. Sa périodicité est donc *diurne*. Son signe est dépendant de la position de l'astre. On parle de répartition spatiale *téssérale*.
- Le terme  $\frac{1}{3} (3 \cos^2 \varphi - 1)(3 \cos^2 \delta - 1)$  ne dépend pas de  $AH$ . On dit que c'est un terme *longue période*. On parle de répartition spatiale *zonale*.

## 4.4 Le potentiel dans le système Terre-Lune-Soleil

### 4.4.1 Caractéristiques astronomiques

Comme nous l'avons vu précédemment, les variations du potentiel générateur des marées sont la conséquence des mouvements des deux astres perturbateurs : la Lune et le Soleil. Définir l'orbite de la Lune autour de la Terre et l'orbite apparente du Soleil autour de la Terre (la Terre tourne autour du Soleil!) est essentiel pour déterminer ce potentiel. Il est nécessaire ici de définir la notion d'*écliptique* : c'est le plan dans lequel évolue le Soleil sur son orbite apparente. Les positions de la Lune et du Soleil peuvent être définies par rapport à l'écliptique dans un système de coordonnées écliptiques. Les coordonnées angulaires sont la longitude et la latitude

écliptiques. La longitude est mesurée par rapport au *point vernal*  $\gamma$  (ou *équinoxe de printemps*) qui est le point sur la ligne d'*équinoxe* (intersection de l'équateur de la Terre et de l'écliptique) où le Soleil coupe le plan équatorial le 21 mars. Ce point d'équinoxe vernal a une position qui varie très lentement au cours des siècles. La latitude est mesurée par rapport au plan de l'écliptique. La déclinaison du Soleil est maximale au moment des *solstices*. Le *Soleil moyen* est le Soleil fictif qui évolue le long de l'écliptique à une vitesse horaire constante.

La distance moyenne de la Terre au Soleil est de 149,6 millions de kilomètres. Le Soleil évolue dans le plan de l'écliptique qui fait un angle  $\varepsilon$  (*obliquité de l'écliptique*) avec l'équateur terrestre variant peu au cours du temps : environ  $23,45^\circ$ . L'*excentricité moyenne*  $e$  du Soleil (paramètre définissant le caractère non rigoureusement circulaire de l'orbite solaire) est de 0,017. Le point vernal bouge très légèrement le long de l'écliptique pour faire une révolution sur le plan de l'écliptique en 26000 années environ (*précession luni-solaire*). Le *périgée* solaire (point de l'orbite le plus proche du Soleil) est à 147,1 millions de kilomètres de la Terre. L'*apogée* solaire (point de l'orbite le plus éloigné du Soleil) est à 152,1 millions de kilomètres. Le périgée solaire accomplit une révolution sidérale en 209,4 siècles. La durée d'une révolution de la Terre est d'une *année tropique* soit 365,24 jours.

La Lune est à une distance moyenne de la Terre de 384400 kilomètres. Elle évolue dans le plan de l'orbite lunaire d'excentricité moyenne égale à 0,055. Cette excentricité est moyenne car à cause des perturbations dues au Soleil, elle varie en fait entre 0,044 et 0,067. Son inclinaison moyenne  $i$  par rapport à l'écliptique est de  $5,15^\circ$  et varie entre  $5^\circ$  et  $5,3^\circ$ . Le nœud ascendant lunaire  $\bar{\Omega}$  est le point d'intersection de l'orbite lunaire avec le plan de l'écliptique quand le mouvement de la Lune est dirigé vers le nord. L'inclinaison  $I$  de l'orbite lunaire par rapport à l'équateur varie au cours du temps en fonction de la position de  $\bar{\Omega}$  : de  $18,5^\circ$  quand  $\bar{\Omega}$  coïncide avec  $\gamma$  à  $28,5^\circ$  quand  $\bar{\Omega}$  coïncide avec l'*équinoxe d'automne* (le point diamétralement opposé à  $\gamma$ , c'est-à-dire le point sur la ligne d'*équinoxe* où le Soleil coupe le plan équatorial le 23 septembre). La périodicité de passage de  $\bar{\Omega}$  sur  $\gamma$  est de 18,61 années, ce qui entraîne un mouvement annuel de  $\bar{\Omega}$  dans la direction ouest de  $19,57^\circ$  par an : c'est la *régression*. Par commodité dans l'étude des marées, l'inclinaison de la Lune sur l'écliptique et l'excentricité lunaire variant très lentement dans le temps, des valeurs moyennes dépendant de la date considérée suffisent aux calculs. Le périgée lunaire est à 363296 kilomètres de la Terre. L'apogée lunaire est à 405504 kilomètres. La durée d'une révolution sidérale de la Lune est égale en moyenne à 27,32 jours et celle du périgée lunaire à 8,85 années tropiques.

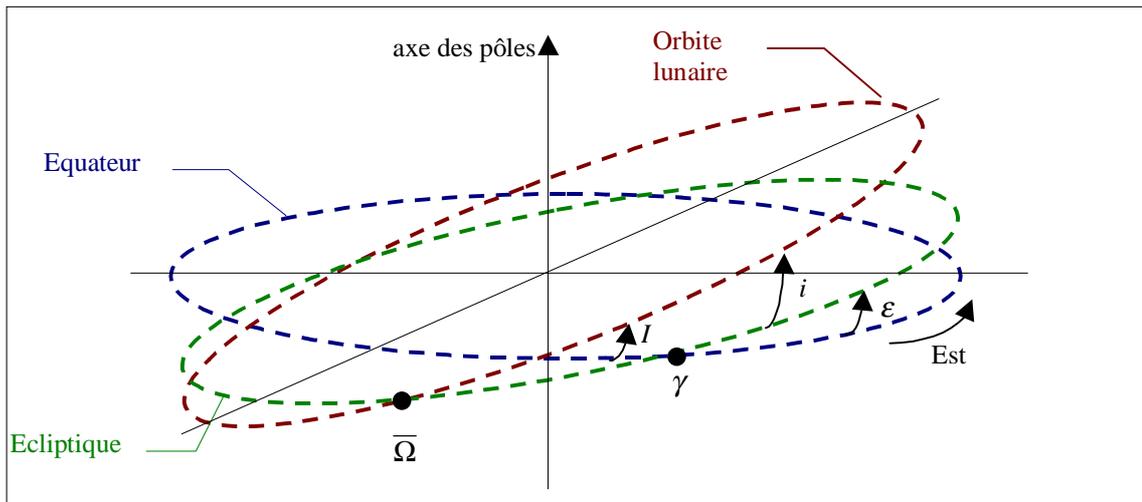


Figure 11 : Caractéristiques des mouvements de la Terre, la Lune et le Soleil

Pendant la durée de rotation de la Terre par rapport aux étoiles fixes (*jour sidéral*), le Soleil s'est déplacé lui aussi le long de l'écliptique dans le sens inverse de la rotation terrestre. Donc le *jour solaire moyen* (passage du Soleil moyen au-dessus d'un même méridien terrestre après une rotation autour de la Terre) est légèrement plus court (23h56min) que le jour sidéral. Au contraire, la Lune se déplace le long de son orbite dans le même sens que l'axe de rotation terrestre. Le jour lunaire moyen est donc plus long que le jour sidéral soit 24h50min28s. Les pleines lunes et les nouvelles lunes ont lieu à chaque fois que la Lune repasse au même point du plan de l'écliptique soit tous les 29,53 jours : c'est la *lunaison*.

Nous avons insisté sur les nombreuses périodes des différents phénomènes résultants de la rotation des astres perturbateurs (Lune et Soleil) autour de la Terre, car elles vont se retrouver dans les périodicités des composantes de la marée. Toutes les périodicités décrites ci-dessus sont incommensurables deux à deux, c'est-à-dire que les mouvements des deux astres perturbateurs n'engendrent pas une force génératrice des marées périodique au sens strict. En effet, il n'existe pas de période au bout de laquelle le phénomène de marée (et donc l'élévation du niveau des océans due aux marées) soit identique. Cependant, il existe une période au bout de laquelle la configuration est quasiment identique. C'est la *période chaldéenne* ou *période de Saros* qui correspond à :

- 241 passages de la Lune au point vernal (*révolution tropique*) soit 6585,5012 jours ;
- 239 passages de la Lune à son périégée (*révolution anomalistique*) soit 6585,5374 jours ;
- 223 lunaisons soit 6585,3211 jours ;
- 222 passages de la Lune au nœud ascendant (*révolution draconistique*) soit 6585,3572 jours ;

- 18 années moyennes (révolution sidérale) soit 6574,3596 jours.

#### 4.4.2 Positions des astres

La théorie solaire de *Newcomb* [1895] donne la position apparente du Soleil en fonction de la longitude écliptique (la latitude écliptique est supposée nulle) et de la distance (sans dimension car rapportée à la distance moyenne : cf. paragraphe 4.4.1) du Soleil par rapport au centre de la Terre. La théorie lunaire de Brown qui prend en compte les effets perturbateurs de la Terre, du Soleil et d'autres astres perturbateurs, donne des positions très précises des mouvements de la Lune. Elle fournit la longitude écliptique, la latitude écliptique et de la distance (sans dimension comme pour la théorie de Newcomb) de la Lune par rapport à la Terre. Ces deux théories combinées permettent de connaître à tout instant les positions précises du Soleil et de la Lune par rapport à la Terre. L'introduction de 5 angles fondamentaux  $s$ ,  $h$ ,  $p$ ,  $N$  et  $p_1$  permet d'exprimer les coordonnées écliptiques du Soleil et de la Lune en fonction du temps. Leurs valeurs ont été données plus haut et sont résumées dans le Tableau 3.

Longitude moyenne	Symbole	Période
Lune	$s$	27,32 jours solaires moyens
Soleil	$h$	365,24 jours solaires moyens
Périgée lunaire	$p$	8,85 années tropiques
Nœud lunaire	$N$	18,61 années tropiques
Périgée solaire	$p_1$	21000 années tropiques

**Tableau 3 : Valeurs des angles fondamentaux des mouvements de la Lune et du Soleil**

Considérons le temps en jours juliens diminué du nombre de jours juliens écoulés au 31 décembre 1899, minuit temps universel. Dans la période julienne, la date d'origine est le 1<sup>er</sup> janvier 4713 avant J.-C. à midi (*calendrier julien*). La journée qui sépare le midi du 1<sup>er</sup> janvier à celui du deux janvier porte le numéro 0. Soit  $T$  le nombre de siècles juliens (soit 36525 jours solaires moyens).

Afin que tous les angles augmentent vers l'est, Doodson a défini  $N' = -N$ . Avec cette convention temporelle, les 5 angles fondamentaux sont alors [*Doodson*, 1921] :

$$\begin{aligned}
 s &= 277,02480 + 481267,89060T + 0,0020T^2 + \dots \\
 h &= 280,18950 + 36000,76892T + 0,0003T^2 + \dots \\
 p &= 334,38530 + 4069,03400T + 0,0103T^2 + \dots \\
 N' &= 100,84320 + 1934,14200T + 0,0021T^2 + \dots \\
 p_1 &= 281,22086 + 1,71920T + 0,0005T^2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Enfin, le *temps moyen solaire de Greenwich*  $t$  et le *temps moyen lunaire de Greenwich*  $\tau$  par la relation sont définis par :

$$\tau = t - s + h \tag{4.20}$$

Le Tableau 4 donne les périodes des angles fondamentaux.

Angle	Période
$\tau$	1,035 jours
$s$	27,32 jours
$h$	365,24 jours
$p$	8,85 années
$N'$	18,61 années
$p_l$	209,4 siècles

**Tableau 4 : Périodes des angles fondamentaux**

## 4.5 Développement du potentiel

---

Grâce à la décomposition du potentiel générateur en polynômes de Legendre, nous avons exprimé le potentiel en une suite infinie (cf. (4.15)). En outre, comme nous l'avons vu plus haut, il est possible d'exprimer les mouvements des astres perturbateurs responsables de la génération des marées (en l'occurrence pour le système terrestre, la Lune et le Soleil) de manière très précise et linéaire. C'est pourquoi, il est possible de développer ce potentiel générateur en série de fonctions pseudo harmoniques (cf. paragraphe 4.5.1) ou harmoniques (cf. paragraphes 4.5.2 et 4.5.3). Nous nous proposons de donner des développements de ce potentiel générateur sous forme de fonctions sinusoïdales ou non du temps dépendant des coordonnées du lieu d'observation. Ce potentiel va comprendre des termes classés suivant trois types de marées définis par la périodicité des phénomènes générateurs (cf. paragraphe 4.3.2) : les termes longues périodes, les termes diurnes et les termes semi-diurnes.

### 4.5.1 Le développement de Darwin

Darwin présenta le premier développement du potentiel générateur de marée en fonctions sinusoïdales du temps. Il est quasi-harmonique car il contient des pseudo constantes qui varient très lentement dans le temps [Darwin, 1883]. Pour repérer la latitude et la longitude de la Lune, Darwin utilise l'orbite lunaire comme système de référence. Nous n'allons pas reprendre ici les calculs et leurs résultats de Darwin. Un développement complet est disponible dans l'ouvrage de Schureman [1958] (complété dans la seconde édition [Schureman, 1971]) et les résultats principaux sont rappelés dans la thèse de Le Provost [1973]. Ce développement contient 32 termes lunaires et 59 termes solaires. Les noms que Darwin a donnés à chacun de ces termes sont toujours utilisés dans les études et les analyses des marées.

Chaque onde est caractérisée par une appellation symbolique composée d'une lettre pour indiquer le groupe auquel elle appartient ( $M, S, O, N, K, Q, \sigma, \rho, \tau, \chi\dots$ ) et d'un indice pour indiquer sa périodicité :

- $a$  pour annuelle ;
- $m$  pour mensuel ;
- $f$  pour semi-mensuel ;
- $1$  pour diurne ;
- $2$  pour demi-diurne ;
- $3$  pour tiers-diurne...

D'autres notations plus complexes sont mises en place. Nous les verrons dans la suite.

### 4.5.2 Le développement de Doodson

#### 4.5.2.1 La décomposition du potentiel

En 1921, *Doodson* [1921] présenta un développement du potentiel générateur beaucoup plus complet. En s'appuyant sur la théorie lunaire de Brown, il a exprimé les coordonnées de la Lune par rapport à l'écliptique. Ses développements, contrairement à ceux de Darwin, sont purement harmoniques. Ils conduisent à environ 400 composantes du potentiel. Doodson a utilisé les 5 angles fondamentaux ainsi que le temps lunaire moyen (cf. paragraphe 4.4.2) pour positionner les mouvements de la Lune et du Soleil dans le repère copernicien terrestre. Le potentiel  $V_2$  (développement à l'ordre 2 de la série en polynômes de Legendre) est alors exprimé sous la forme :

$$\Pi_A = \Pi_{20} + \Pi_{21} + \Pi_{22} \quad (4.21)$$

avec :

- pour les ondes longues périodes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_{20} = \lambda_0 \left[ c_L \left( \frac{R_{0L}}{R_L} \right)^3 \cos^2 \delta_L \cos(2AH_L) + c_S \left( \frac{R_{0S}}{R_S} \right)^3 \cos^2 \delta_S \cos(2AH_S) \right] \\ \lambda_0 = \frac{1 - 3 \sin^2 \varphi}{2} \end{array} \right. \quad (4.22)$$

- pour les ondes diurnes :

$$\begin{cases} \Pi_{21} = \sin \varphi \left[ c_L \left( \frac{R_{0L}}{R_L} \right)^3 \sin \delta_L \cos(AH_L) + c_S \left( \frac{R_{0S}}{R_S} \right)^3 \sin \delta_S \cos(AH_S) \right] \\ \lambda_1 = \sin \varphi \end{cases} \quad (4.23)$$

- pour les ondes semi-diurnes :

$$\begin{cases} \Pi_{22} = \lambda_2 \left[ c_L \left( \frac{R_{0L}}{R_L} \right)^3 \left( \frac{2}{3} - 2 \sin^2 \delta_L \right) + c_S \left( \frac{R_{0S}}{R_S} \right)^3 \left( \frac{2}{3} - 2 \sin^2 \delta_S \right) \right] \\ \lambda_2 = \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (4.24)$$

Les  $\lambda_i$  sont appelés les *facteurs de latitude* : ce sont eux qui déterminent le type de la marée. Ils dépendent de  $\varphi$  la latitude à laquelle le potentiel s'exerce. Les coefficients  $c_L$  et  $c_S$  sont définis dans le paragraphe 4.2.2.3.  $\delta_L$  et  $\delta_S$  sont les déclinaisons respectives de la Lune et du Soleil, et  $AH_L$  et  $AH_S$ , leurs angles horaires respectifs.

#### 4.5.2.2 Les composantes principales du développement

Pour obtenir son développement du potentiel, Doodson a calculé chacun des trois termes de (4.21) sous la forme :

$$\Pi_{2k} = \lambda_k(\varphi) \sum_i \alpha_i \cos[\Theta_i(t)] \quad (4.25)$$

avec :

- $\alpha_i$  les coefficients positifs du développement harmonique ;
- $\Theta_i(t) = A\tau + Bs + Ch + Dp + EN' + Fp_1$  les *arguments astronomiques* (ou *arguments de Doodson*) au méridien de Greenwich avec  $A, B, C, D, E$  et  $F$  des nombres entiers et  $t$  l'heure civile du lieu considéré.

Chaque terme du développement est une *composante* caractérisée par une combinaison de 6 nombres entiers. Doodson a mis en place l'emploi du nombre argument afin d'identifier les composantes. En remarquant que  $A$  est toujours positif et que  $B, C, D, E$  et  $F$  sont toujours compris entre -4 et +4, le nombre argument  $\eta$  est :

$$\eta = A.10^5 + (B + 5).10^4 + (C + 5).10^3 + (D + 5).10^2 + (E + 5).10 + (F + 5) \quad (4.26)$$

Les composantes ayant le même  $A$  constituent une *espèce*. Les composantes qui ont le même  $A$  et le même  $B$  constituent un *groupe*. Enfin, celles qui ont le même  $A$ , le même  $B$  et le même  $C$  constituent un *sous-groupe*.

Nous reportons dans le Tableau 5 les principales composantes et leurs caractéristiques. Tous les coefficients ont été recalculés par nos soins. L'origine de l'onde est Lunaire (L) ou Solaire (S). Ces calculs nous ont permis d'une part de vérifier les calculs de Doodson et d'autre part ajouter les fréquences en radians par secondes des différentes ondes du spectre de marée. Ce tableau corrobore et complète les travaux de Doodson.

De ce Tableau 5, nous pouvons tirer plusieurs remarques. Bien que le développement de Doodson comporte plus de 400 composantes, celles qui sont sélectionnées ci-dessus représentent la plus grande partie de celles du potentiel générateur. Grâce à la période calculée des composantes, nous retrouvons les trois grandes classifications (espèces) des ondes de marée : les longues périodes (périodes supérieures au jour), les diurnes (périodes de l'ordre de la journée) et les semi-diurnes (périodes de l'ordre de la demi-journée). Enfin, ce qui caractérise principalement les trois différentes espèces, c'est  $\tau$ , le temps solaire moyen multiplié par un coefficient égal à 0 pour les longues périodes, 1 pour les diurnes et 2 pour les semi-diurnes.

Nom de Darwin	Nombre de Doodson	Argument de Doodson	Coef. harm. $\alpha_i$	Fréquence (°/h)	Fréquence (rad/s)	Période (jours)	Origine
$M_0$	055.555	-	0,50458	0		-	L
$S_0$	055.555	-	0,23411	0		-	S
$S_a$	056.554	$h - p_1$	0,01176	0,0410667	0,0000001991	365,2594	S
$S_{sa}$	057.555	$2h$	0,07287	0,0821373	0,0000003982	182,6211	S
$S_{ia}$	058.554	$3h - p_1$	0,00427	0,1232040	0,0000005973	121,7493	S
$M_{sm}$	063.655	$s - 2h + p$	0,01578	0,4715211	0,0000022860	31,8119	L
$M_m$	065.455	$s - p$	0,08254	0,5443747	0,0000026392	27,5546	L
$M_{sf}$	073.555	$2s - 2h$	0,01370	1,0158958	0,0000049252	14,7653	L
$M_f$	075.555	$2s$	0,15642	1,0980331	0,0000053234	13,6608	L
$M_{stm}$	083.655	$3s - 2h + p$	0,00569	1,5695548	0,0000076094	9,5569	L
$M_m$	085.455	$3s - p$	0,02995	1,6424078	0,0000079626	9,1329	L
$M_{sqm}$	093.555	$4s - 2h$	0,00478	2,1139288	0,0000102486	7,0958	L
$2Q_1$	125.755	$\tau - 3s + 2p$	0,00955	12,8442862	0,0000622709	1,1678	S
$\sigma_1$	127.555	$\tau - 3s + 2h$	0,01153	12,9271398	0,0000626725	1,1603	L
$Q_1$	135.655	$\tau - 2s + p$	0,07216	13,3986609	0,0000649585	1,1195	S
$\rho_1$	137.455	$\tau - 2s + 2h + p$	0,01371	13,4715145	0,0000653117	1,1135	L
$O_1$	145.555	$\tau - s$	0,37689	13,9430356	0,0000675977	1,0758	L
$\tau_1$	147.555	$\tau - s + 2h$	0,00491	14,0251729	0,0000679960	1,0695	
$M_{11}$	155.655	$\tau + p$	0,02964	14,4966939	0,0000702820	1,0347	L
$M_{12}$	155.655	$\tau + p$	0,01040	14,4874103	0,0000702369	1,0295	L
$\chi_1$	157.455	$\tau + 2h - p$	0,00566	14,5695476	0,0000706352	1,0295	L
$\pi_1$	162.556	$\tau + s - 3h + p_1$	0,01029	14,9178647	0,0000723238	1,0055	S
$P_1$	163.555	$\tau + s - 2h$	0,17554	14,9589314	0,0000725229	1,0027	S
$K_1^L$	165.555	$\tau + s$	0,36233	15,0410686	0,0000729212	0,9973	L
$K_1^S$	165.555	$\tau + s$	0,16817	15,0410686	0,0000729212	0,9973	S
$\psi_1$	166.554	$\tau + s + h + p_1$	0,00423	15,0821353	0,0000731203	0,9946	S
$\phi_1$	167.555	$\tau + s + 2h$	0,00756	15,1232059	0,0000733194	0,9919	S
$\theta_1$	173.655	$\tau + 2s - 2h + p$	0,00566	15,5125897	0,0000752072	0,9670	L
$J_1$	175.455	$\tau + 2s - p$	0,02954	15,5854433	0,0000755604	0,9624	L
$SO_1$	183.455	$\tau + 3s - 2h$	0,00492	16,0569644	0,0000778464	0,9342	L
$OO_1$	185.655	$\tau + 3s + N'$	0,01623	16,1391017	0,0000782446	0,9294	L
$v_1$	195.455	$\tau + 4s - p$	0,00311	16,6834764	0,0000808838	0,8991	L
$\varepsilon_2$	227.655	$2\tau - 2s + 2p + N'$	0,00671	27,3416964	0,0001325563	0,5486	L
$2N_2$	235.755	$2\tau - 2s + 2p$	0,02301	27,9692084	0,0001355985	0,5363	L
$\mu_2$	237.555	$2\tau - 4s + 4h$	0,02777	27,9682084	0,0001355937	0,5363	L
$N_2$	245.655	$2\tau - s + p$	0,17387	28,4397295	0,0001378797	0,5274	L
$v_2$	247.455	$2\tau - s + 2h - p$	0,03303	28,512583	0,0001382329	0,5261	L
$M_2$	255.555	$2\tau$	0,90812	28,9841042	0,0001405189	0,5175	L
$\lambda_2$	263.655	$2\tau - s - 2h + p$	0,00670	29,4556253	0,0001428049	0,5092	L
$L_2$	265.455	$2\tau + s - p$	0,02567	29,5377626	0,0001432031	0,5078	L
$T_2$	272.556	$2\tau + 2s - 3h + p_1$	0,02479	29,5589333	0,0001433058	0,5075	S
$S_2$	273.555	$2\tau + 2s - 2h$	0,42286	30,0000000	0,0001454441	0,5000	S
$R_2$	274.554	$2\tau + 2s - h - p_1$	0,00354	30,0410667	0,0001456432	0,4993	S
$K_2^S$	275.555	$2\tau + 2s$	0,03648	30,0821373	0,0001458423	0,4986	S
$K_2^L$	275.555	$2\tau + 2s$	0,07858	30,0821373	0,0001458423	0,4986	L

Tableau 5 : Principales composantes extraites du développement de Doodson (calculs de l'auteur)

### 4.5.2.3 Interprétation des composantes

Dans le cas où la Lune serait le seul astre perturbateur évoluant dans le plan équatorial suivant un mouvement circulaire uniforme, la force génératrice des marées engendrerait une élévation périodique sinusoïdale élémentaire du niveau des océans. Cependant, de très nombreuses perturbations rendent cette force beaucoup plus complexe. Comme nous l'avons vu au paragraphe 4.4, le Soleil exerce aussi une force génératrice des marées. Et ces deux astres perturbateurs ont des mouvements beaucoup plus complexes qu'une simple rotation circulaire dans le plan équatorial. En effet, leurs distances à la Terre varient, leurs orbites sont elliptiques et non circulaires, et elles sont contenues dans un plan dont l'angle varie avec le plan équatorial terrestre. La Lune, le Soleil et la Terre interagissent entre eux et modifient les trajectoires orbitales. Il s'ensuit donc que la force génératrice excessivement complexe des marées peut-être en fait, lord Kelvin fut le premier à l'énoncer, égale à la somme de forces élémentaires qui chacune génère une variation sinusoïdale simple de la surface des océans. Cette interprétation de l'origine des marées revient à considérer qu'elles sont générées par une multitude d'astres fictifs de masses différentes qui évolueraient à différentes distances du centre de la Terre, dans son plan équatorial et suivant différentes périodes de révolution. Ainsi chacune de ces forces élémentaires crée une *onde de marée* en apportant une contribution sinusoïdale aux élévations maritimes qui est caractérisée par une amplitude et une phase. Le développement de Doodson donne ces valeurs. Chacune des variations élémentaires du niveau de l'eau s'appelle une *composante harmonique*. La représentation de ces ondes (amplitude en fonction de la fréquence de l'onde considérée) constitue le *spectre de marée* déterminé à partir des élévations dans le temps du niveau des océans en un point donné. L'*analyse spectrale* permet de différencier les différentes composantes en un lieu donné et l'*analyse harmonique* (calcul mathématique basé sur la théorie du signal) fournit l'amplitude et la phase de chacune de ces composantes.

Le nom donné par Darwin à chacune des composantes de la marée ( $M_2$ ,  $K_1$ ...) caractérise l'origine de la force génératrice élémentaire. Déterminons l'origine des principales ondes de marée suivant l'amplitude donnée par le coefficient harmonique du développement de Doodson (cf. Tableau 5). La composante la plus importante est  $M_2$  (en anglais : M=Moon, 2=semi-diurne). C'est la composante lunaire principale due à un astre fictif de la taille de la Lune évoluant suivant une orbite circulaire dans le plan de l'équateur terrestre. Sa période est de 0,5175 jours soit 12h25min, ce qui correspond approximativement à la période séparant deux basses mers et deux pleines mers le long des côtes atlantiques européennes (la moitié du jour lunaire moyen). Elle est encadrée par plusieurs composantes à variations elliptiques de sa période dont les deux plus importantes sont  $L_2$  l'elliptique lunaire mineure de  $M_2$  et  $N_2$  l'elliptique lunaire majeure de  $M_2$  (la lettre M est entre L et N dans l'alphabet).  $N_2$  est induite par les variations de la distance entre la Terre et la Lune. L'équivalent de  $M_2$  pour la lune est  $S_2$

pour le Soleil (en anglais : S=Sun, 2=semi-diurne) dont la période est exactement 0,5 jours soit 12h00min ce qui correspond à une demi-journée de jour sidéral.  $S_2$  est elle aussi encadrée de plusieurs composantes à variations elliptiques de sa période. Les deux plus importantes sont  $R_2$  l'elliptique solaire mineure de  $S_2$  et  $T_2$  l'elliptique solaire majeure de  $S_2$  (R et T encadrent S). Enfin il existe  $K_2^L$  et  $K_2^S$  deux composantes qui, ayant le même nombre de Doodson et la même période mais dont l'une à pour origine la Lune et l'autre le Soleil, sont dénommées de manière identique. C'est pourquoi  $K_2$  est nommée déclinaisonnelle luni-solaire semi-diurne. Elle est liée à la variation des déclinaisons de la Lune et du Soleil.

Les ondes de l'espèce diurne sont dues à la déclinaison de la Lune et du Soleil. Elles engendrent des inégalités diurnes de la force génératrice des marées. La composante principale est  $K_1$ . Tout comme  $K_2$ , elle se compose d'une partie lunaire,  $K_1^L$  et d'une partie solaire  $K_1^S$ .  $K_1$  est nommée déclinaisonnelle luni-solaire diurne. Sa période est de 0,9973 jours soit 23h56min11s.  $O_1$  est la composante lunaire diurne principale et est induite par les variations de la déclinaison de la Lune.  $P_1$  est la composante solaire diurne principale et est générée par les variations de déclinaison du Soleil.  $K_1$  et  $O_1$  sont encadrées de plusieurs composantes qui correspondent à des variations elliptiques par rapport à leurs périodes. Ainsi,  $Q_1$  est la composante elliptique majeure de  $O_1$ .

Enfin, l'espèce des longues périodes est plus particulière.  $M_0$  et  $S_0$  correspondent aux termes permanents de la marée.  $M_0$  est l'onde lunaire permanente et  $S_0$  est l'onde solaire permanente. En considérant une Terre entièrement recouverte d'une fine pellicule d'eau correspondant aux océans, l'équilibre statique est tout le temps vérifié pour les ondes longues périodes. Les continents ont donc très peu d'influence sur cette espèce d'onde. Dans le développement harmonique de Doodson, la Terre est supposée rigide, ce qui n'est pas le cas. En effet, elle présente une certaine élasticité, qui fait que la force génératrice des marées s'applique, elle aussi, aux continents et aux terres submergées. La marée calculée n'est donc pas la marée réelle, car le plancher océanique se soulève et s'abaisse lui aussi. Il faut donc tenir compte de ce phénomène pour obtenir la marée réelle. Les termes permanents de la marée sont représentatifs de ce phénomène. En général, leurs effets sont pris en compte dans le phénomène des marées terrestres qui sont soustraites aux marées calculées pour accéder à la marée réelle (cf. Chapitre 6).  $S_a$  est l'onde solaire annuelle (en anglais : S=Sun, a=annual) due aux variations de la longitude moyenne du Soleil par rapport à son périhélie. Sa période est légèrement supérieure à l'année tropique soit 365,26 jours. De même pour la Lune, il existe  $M_m$  qui est l'onde lunaire moyenne mensuelle (en anglais : M=Moon, m=monthly), de période 27,55 jours soit un peu plus que la durée d'une révolution sidérale moyenne de la Lune. Enfin, les variations des déclinaisons du Soleil et de la Lune engendrent respectivement  $S_{sa}$  (en anglais : S=Sun,

sa=semi-annual) l'onde déclinatoire solaire semi-annuelle et  $M_f$  (en anglais : M=Moon, f=fortnightly) l'onde déclinatoire lunaire semi-mensuelle.

### 4.5.3 Le développement de Cartwright et Tayler

Ce développement [Cartwright and Eden, 1973; Cartwright and Tayler, 1971] a été calculé numériquement pour vérifier les résultats de Doodson. Il utilise des éphémérides de grandes précisions pour la Lune et le Soleil ainsi que de nouvelles constantes astronomiques. Les auteurs ont exprimé le potentiel générateur des marées sous la forme :

$$V = Re \left[ g \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{lm}^*(t) W_{lm}(\lambda, \varphi) \right] \quad (4.27)$$

$c_{lm}^*(t)$  étant le conjugué complexe qui correspond à la marée d'équilibre à Greenwich, de degré  $l$  et d'ordre  $m$ . Les parties réelles et imaginaires de  $c_{lm}^*(t)$  comprennent les paramètres nodaux [Munk and Cartwright, 1966]. Les  $W_{lm}$  sont les harmoniques sphériques complexes qui dépendent uniquement du lieu considéré :

$$W_{lm}(\lambda, \varphi) = N_{lm} P_m(\sin \varphi) e^{im\lambda} \quad (4.28)$$

avec :

- $P_m$  le polynôme de Legendre ;
- $N_{lm}$  des facteurs de normalisation.

Les facteurs de normalisation sont donnés par :

$$N_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad (4.29)$$

Cartwright et Tayler ont directement calculé les éphémérides de la Lune et du Soleil et ils ont pris en compte la très légère variation de l'angle de l'écliptique avec l'équateur terrestre. Ce qui entraîne que leurs coefficients harmoniques du potentiel générateur, contrairement à ceux de Doodson, varient très légèrement dans le temps. Le développement du potentiel par Doodson est analytique tandis que celui de Cartwright et Tayler en extrait les différents termes du potentiel en faisant une FFT (Fast Fourier Transform) d'éphémérides. Cependant, les résultats sont très comparables. Les écarts entre les coefficients harmoniques de Doodson et ceux de Cartwright et Tayler n'excèdent pas 0,1%.

C'est pourquoi, dans la suite de notre étude, nous utiliserons le développement du potentiel générateur de Doodson pour tous nos calculs.

#### **4.5.4 Le développement de Hartmann et Wenzel**

Bien que le développement de Doodson soit de qualité suffisante pour nos travaux sur les marées, il est à noter qu'au cours des années 1990, des développements beaucoup plus précis du potentiel astronomique ont été proposés. En particulier le développement de *Hartmann et Wenzel* [1994; 1995] contient 12935 ondes incluant 1483 ondes directement dues aux effets des planètes. Les auteurs ont pris en considération les potentiels générateurs astronomiques de la Lune, du Soleil et des planètes Vénus, Jupiter, Mars, Mercure et Saturne. Ils ont utilisé des constantes astronomiques et des algorithmes de calculs modernes ainsi que les éphémérides numériques les plus précises qu'ils avaient à disposition. Ces deux auteurs ont ainsi produit le catalogue HW95.



## Chapitre 5

### Les équations générales de la marée

#### 5.1 Présentation du chapitre

Les développements du potentiel générateur de la marée du chapitre précédent nous permettent d'envisager une résolution de la marée par des méthodes harmoniques. L'introduction des équations de marées en plein océan et en petits fonds va nous permettre de modéliser la marée. En particulier la linéarisation du coefficient de frottement autorise la résolution de ces équations tout à la fois en zones pélagiques et en zones littorales. Cette linéarisation fait apparaître d'autres ondes non harmoniques présentes dans le spectre de marée qui seront caractérisées.

#### 5.2 Réponse de l'océan à l'excitation du potentiel générateur

##### 5.2.1 Equations des ondes longues

###### 5.2.1.1 Equations de Navier-Stokes

La mécanique des fluides nous donne les équations du mouvement d'un fluide de viscosité constante en milieu tournant. Ce sont les *équations de Navier-Stokes* [Gill, 1982] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \mathbf{u} = 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \end{array} \right. \quad (5.30)$$

avec :

- $\mathbf{u}$  : la vitesse d'une particule d'eau ;

- $\rho$  : la masse volumique de l'eau ;
- $\mathbf{g}$  : la pesanteur supposée constante ;
- $p$  : la pression de l'eau ;
- $\boldsymbol{\Omega}$  : le vecteur de rotation de la Terre supposé constant ;

La première équation de (5.30) est l'équation de continuité (ou équation de conservation de la masse) et la deuxième est l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Par définition la dérivé particulaire est :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$$

### 5.2.1.2 Hypothèse des ondes longues

Dans le cadre de l'étude des marées océaniques la résolution des équations de la marée est complexe. Il faut les simplifier pour obtenir les équations de Laplace [Pekeris and Accad, 1969]. Ainsi, plusieurs approximations (légitimes comme nous allons le voir) doivent être faites. C'est pourquoi, nous assimilerons l'eau à un fluide incompressible. Nous négligerons les effets de la turbulence et donc, nous ne tiendrons pas compte des effets de viscosité. Dans ce cas, les équations de Navier-Stokes définies en (5.30) se simplifient et deviennent dans le repère terrestre  $\mathfrak{R}$  défini dans le paragraphe 3.3.1 :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nabla\Pi - \frac{1}{\rho}\mathbf{F}_f \end{cases} \quad (5.31)$$

avec :

- $\mathbf{u}$  : la vitesse d'une particule d'eau ;
- $\rho$  : la masse volumique constante de l'eau puisqu'elle est supposée incompressible ;
- $\mathbf{g}$  : la pesanteur supposée constante ;
- $p$  : la pression de l'eau ;
- $\boldsymbol{\Omega}$  : le vecteur de rotation de la Terre supposé constant ;
- $\Pi$  : le potentiel astronomique générateur des marées ;
- $\mathbf{F}_f$  : une force de frottement sur le plancher océanique.

Pour étudier les marées, deux hypothèses supplémentaires sont à considérer :

- la composante verticale de la vitesse est négligeable devant les composantes horizontales ;
- le fluide est barotrope, c'est-à-dire que sur une même verticale, toutes les particules d'eau se déplacent à la même vitesse (même module, même direction, même sens).

Ces deux approximations constituent l'*hypothèse des ondes longues*. La première hypothèse est justifiée par les observations. L'amplitude de la marée est de l'ordre du mètre, alors que pour les ondes semi-diurnes la période est d'une demi-journée. C'est-à-dire que les ondes de marées parcourent le tour de la Terre (environ 40000 km) en 12h environ et s'élèvent et s'abaissent d'un mètre environ pendant cette même période. Les vitesses verticales sont donc négligeables. La seconde hypothèse se justifie par le fait que les océans sont une couche de fluide mince à la surface de la Terre. En effet, la profondeur moyenne des océans est de l'ordre de 4 kilomètres alors que leurs dimensions horizontales sont de l'ordre du millier de kilomètres. Le déplacement des masses d'eau peut donc être considéré comme uniforme sur toute la colonne d'eau.

En outre à (5.31), il faut ajouter des conditions aux limites, en surface (la pression de l'eau est égale à la pression atmosphérique) et au fond (vitesse normale au plancher océanique donc nulle au fond).

Avec l'hypothèse de la vitesse horizontale nulle, on montre que :

$$p(\lambda, \varphi, t) = P_a + \rho g(h - z) \quad (5.32)$$

avec :

- $P_a$  : la pression atmosphérique à la surface des océans ;
- $h$  : la hauteur instantanée de la colonne d'eau du fond à la surface en un point de coordonnées  $(\lambda, \varphi)$  ;
- $t$  : le temps donné.

Nous avons :

$$h = H + \alpha \quad (5.33)$$

avec :

- $H$  : la profondeur constante d'un océan au point considéré ;
- $\alpha$  : l'élévation de surface due à la marée.

Avec toutes ces hypothèses justifiées dans le cadre de l'étude des marées océaniques qui sont des ondes longues, (5.31) se simplifie en :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla[(H + \alpha)\mathbf{u}] = 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g\nabla\alpha - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nabla\Pi - \frac{1}{\rho}\mathbf{F} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \alpha(\lambda, \varphi, t) \\ \mathbf{u}(u_x(x, y, 0, t), u_y(x, y, 0, t), 0) \end{cases} \quad (5.34)$$

### 5.2.2 Equations linéarisées de la marée

Loin des côtes, les courants de marée sont très faibles, tout comme leurs dérivées spatiales, donc :

$$\|\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{u}\|, \text{ d'où } \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} \approx \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \quad (5.35)$$

De plus, comme nous l'avons vu,  $\alpha$  reste petit devant  $H$  au large donc :

$$H + \alpha \approx H, \text{ d'où } \nabla[(H + \alpha)\mathbf{u}] \approx H\nabla\mathbf{u} \quad (5.36)$$

Enfin, au large, les forces de frottement sont négligeables par rapport aux autres forces en jeu. En effet, la couche turbulente qui se développe par frottement sur le fond est de dimension négligeable par rapport à la colonne d'eau considérée et mise en mouvement par la force génératrice des marées. Donc nous obtenons grâce à (5.35) et (5.36) une linéarisation de (5.34). Ce sont les *équations linéarisées de la marée* :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + H\nabla\mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -g\nabla\alpha - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nabla\Pi \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \alpha(\lambda, \varphi, t) \\ \mathbf{u}(u_x(x, y, 0, t), u_y(x, y, 0, t), 0) \end{cases} \quad (5.37)$$

### 5.2.3 Equations des marées littorales

En zones littorales (petits fonds, zones côtières, mers littorales, plateaux océaniques...) les hypothèses faites pour obtenir les équations linéarisées de la marée ne sont plus applicables. D'une part, nous ne pouvons négliger le terme de frottement sur le plancher océanique car la couche limite turbulente développée sur le fond par la colonne d'eau, mise en mouvement par la force génératrice des marées, est de l'ordre de la dimension de cette colonne. D'autre part, nous ne pouvons plus négliger les termes non linéaires des vitesses car les gradients topographiques en petits fonds modifient rapidement la hauteur de la colonne d'eau en mouvement.

Les hypothèses classiques qui caractérisent les marées littorales [Hyacinthe and Kravtchenko, 1967] sont adaptées à notre cas par Le Provost [1973] :

- $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u_x(x, y, 0, t), u_y(x, y, 0, t), 0)$  : la vitesse verticale est négligeable par rapport aux vitesses horizontales et les composantes de la vitesse ne dépendent pas de la verticale ;
- la viscosité du fluide est négligeable ;
- le frottement de fond équivaut à une force.

Ainsi, cette force de frottement  $\mathbf{F}_f$  est donnée par :

$$\mathbf{F}_f = \frac{C_f}{h} \|\mathbf{u}\| \mathbf{u} \quad (5.38)$$

avec :

- $h$  : la profondeur d'eau instantanée ( $h = H + \alpha$ )
- $\mathbf{u}$  : la vitesse barotrope horizontale
- $C_f$  : le coefficient de frottement sans dimension de type Chézy

Le coefficient de frottement est déterminé empiriquement. Nous donnons dans les chapitres suivants des ordres de grandeurs et des valeurs de ce coefficient. C'est un terme quadratique.

Avec (5.34) et (5.38), nous obtenons les *équations des marées littorales* :

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla[(H + \alpha)\mathbf{u}] = 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -g\nabla\alpha - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \nabla\Pi - \frac{C_f}{\rho(H + \alpha)} \|\mathbf{u}\| \mathbf{u} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \alpha(\lambda, \varphi, t) \\ \mathbf{u}(u_x(x, y, 0, t), u_y(x, y, 0, t), 0) \end{cases} \quad (5.39)$$

## 5.3 Influence du coefficient de frottement

### 5.3.1 Expression du niveau de la surface océanique due au potentiel

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre 4, le potentiel générateur des marées peut se décomposer en une somme de fonctions sinusoïdales élémentaires. L'expression des équations linéarisées de la marée amène donc à chercher la dénivellation du niveau des océans créée par la force génératrice des marées, dont dérive le potentiel, sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales élémentaires :

$$\alpha(\lambda, \varphi, t) = \sum_k A_k(\lambda, \varphi) \cos(\omega_k t + \varphi_k(\lambda, \varphi)) \quad (5.40)$$

où :

- $A_k$  est l'amplitude de la composante k de la dénivellation due à la marée ;
- $\varphi_k$  est la phase de la composante k de la dénivellation due à la marée ;
- $\omega_k$  est la fréquence de la composante k : elle est donnée par le développement de Doodson.

$A_k$  et  $\varphi_k$  ne dépendent que de la position du point considéré à la surface des océans (latitude et longitude).

En fait une expression plus complète de la dénivellation de la surface libre est donnée par Doodson :

$$\alpha(x, y, t) = \alpha_0(x, y) + \sum_{i=1}^N f_i A_i(x, y) \cos[\omega_i t - g_i(x, y) + (V_0 + u)_i(t)] \quad (5.41)$$

avec :

- $\alpha_0$  le niveau moyen ;
- $A_i$  l'amplitude de l'onde i ;
- $\omega_i$  la fréquence de l'onde i ;
- $g_i$  le déphasage de l'onde i par rapport au passage de l'astre perturbateur au méridien de Greenwich ;
- $V_0$  la phase de l'astre perturbateur à l'origine des temps ;
- $f_i$  le coefficient de correction nodale d'amplitude pour l'onde i.
- $u_i(t)$  le coefficient de correction nodale de phase pour l'onde i ;

Les coefficients de correction nodale représentent les très faibles variations des nœuds des astres perturbateurs sur l'écliptique. Des valeurs de ces coefficients sont données par *Schureman* [1958].

### 5.3.2 Expression des vitesses dues au potentiel

Comme les vitesses de marées dérivent directement de la dénivellation, nous pouvons aussi rechercher ces vitesses sous la décomposition similaire de somme de fonctions sinusoïdales élémentaires :

$$\mathbf{u}(\lambda, \varphi, t) = \sum_k \mathbf{U}_k(\lambda, \varphi) \cos(\omega_k t + \varphi_k(\lambda, \varphi)) \quad (5.42)$$

### 5.3.3 Introduction du coefficient de frottement

L'introduction d'un terme de frottement dans les équations de marées permet une meilleure modélisation du phénomène en zones côtières. Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les ondes de marées générées par le potentiel astronomique. Ces ondes sont dites *ondes astronomiques*. Cependant, nous allons voir dans la suite que d'autres ondes s'ajoutent au spectre de marée. En effet, du fait de la complexité non-linéaire de la propagation des ondes de marées en petits fonds, des ondes apparaissent. Nous les retrouvons dans la décomposition du terme de frottement de fond. Ces ondes non linéaires apparaissent avec des fréquences supérieures à celles des ondes astronomiques.

Les équations de la marée posent un problème de taille : le coefficient de frottement est un terme quadratique de la vitesse, alors que le reste des équations est linéaire. Linéariser le terme de frottement permettrait donc de linéariser les équations de la marée et ainsi de les résoudre. Dans son travail de thèse, *Le Provost* [1973] a décomposé le terme quadratique de frottement d'une marée multipériodique dans un domaine bidimensionnel, à la condition qu'une composante du spectre de la marée étudiée soit dominante. Par définition une onde de marée est dite dominante, si l'amplitude de sa vitesse est toujours strictement positive et si l'amplitude maximale de sa vitesse dépasse strictement la vitesse résultante créée par l'ensemble des autres composantes. Cette dernière hypothèse est largement vérifiée de par le monde, grâce aux nombreux spectres de marées déduits de l'analyse des signaux relevés par les marégraphes. En général, l'onde dominante est  $M_2$  voire  $K_1$ . C'est donc une constatation expérimentale. *Le Provost* [1973] a cherché les développements limités généralisés de Fourier des deux composantes du coefficient de frottement et en a donné l'expression grâce à une hypothèse, vérifiée expérimentalement dans la Manche, d'existence d'une onde dominante.

### 5.3.4 Décomposition du coefficient de frottement

Les travaux de *Le Provost* [1973] finalisés avec ceux de *Le Provost et al.* [1981] donnent l'expression linéarisée du coefficient de frottement. Cette formulation est rappelée dans le

Chapitre 6 quand nous introduisons les équations spécifiquement utilisées dans le modèle hydrodynamique.

## 5.4 Ondes de marées non astronomiques

---

### 5.4.1 Ondes non linéaires

Grâce à la linéarisation du coefficient de frottement, nous pouvons donc introduire les expressions sinusoïdales (5.40) de la dénivellation dans (5.39). Du fait du terme quadratique  $\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$ , des termes en  $\prod_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$  apparaissent.

Par les formules de linéarisations trigonométriques, nous pouvons simplifier ces produits de fonctions sinusoïdales en :

$$\cos\left[\left(\sum p_i \omega_i\right)t + \Phi\right]$$

avec :

- $p_i$  des entiers négatifs, positifs ou nuls ;
- $\omega_i$  des fréquences des composantes astronomiques de marées ;
- $\Phi$  une phase associée.

Ainsi, des termes provenant de la non-linéarité du coefficient de frottement sont déduits des équations de la marée. Ces termes ont des fréquences particulières qui sont des combinaisons linéaires des fréquences des composantes astronomiques, chacune pondérée par un entier. Ces nouvelles ondes qui apparaissent en petits fonds sont des *ondes d'interactions* de fréquences égales à la combinaison linéaire de deux, trois (ou plus) fréquences des termes du potentiel astronomique. En effet elles sont bien la conséquence de l'interaction de plusieurs ondes astronomiques.

Parmi ces ondes, nous distinguerons :

- les *ondes composées* qui sont dues à l'interaction de plusieurs ondes astronomiques différentes ;
- les *ondes supérieures* qui sont dues à l'interaction d'une onde avec elle-même.

Dans la décomposition du spectre de marée, les ondes composées proviennent en très grande majorité des ondes  $M_2$ ,  $S_2$ ,  $K_2$ ,  $N_2$ ,  $K_1$ , et  $O_1$ . Les deux principales ondes qui génèrent des ondes supérieures sont  $M_2$  et  $S_2$ .

Ces ondes sont dénommées en fonction des ondes astronomiques dont elles sont issues. Par exemple :

$$\begin{aligned}
 M_4 &= M_2 + M_2 \\
 MS_4 &= M_2 + S_2 \\
 2MS_2 &= M_2 + M_2 - S_2 \\
 3MN_4 &= M_2 + M_2 + M_2 - N_2
 \end{aligned}$$

Elles sont plus ou moins importantes en petits fonds car elles sont largement dépendantes de la géométrie du milieu où se propagent les ondes astronomiques de marées. En effet, étant formées par le frottement de la colonne d'eau considérée sur le fond océanique, elles sont générées par l'amplification de certaines ondes par résonance ou réflexion sur la rugosité du fond et des côtes. Les ondes non linéaires les plus importantes sont données dans le Tableau 6 [Bessero, 1985].

Nom de Darwin	Nombre de Doodson	Fréquence (°/h)	Période (jours)	Espèce
$2SM_2$	291.555	31,0158958	0,48362298	semi-diurne
$2MS_2$	237.555	27,9682084	0,53632323	semi-diurne
$M_4$	455.555	57,9682084	0,25876253	quart-diurne
$MS_4$	473.555	58,9841042	0,2543058	quart-diurne
$M_6$	655.555	86,9523127	0,17250835	sixième-diurne
$2MS_6$	673.555	87,9682084	0,17051615	sixième-diurne
$M_8$	863.655	115,9364169	0,12938126	sixième-diurne
$3MS_8$	873.555	116,9523127	0,1282574	huitième-diurne

**Tableau 6 : Principales composantes non linéaires**

Il faut noter que certaines ondes non-linéaires ont exactement la même fréquence que certaines ondes astronomiques. Ainsi en est-il de  $2MS_2$  et de  $\mu_2$  (fréquence de 27,9682084°/h) ainsi que de  $2MN_2$  et  $L_2$  (fréquence de 29,5377626°/h). Au cours de l'analyse harmonique d'un signal de marée mesuré, il est donc impossible de distinguer la partie astronomique et la partie non-linéaire de ces ondes de même fréquence.

### 5.4.2 Ondes météorologiques

Nous avons vu que nous pouvons trouver dans le spectre de marée des ondes d'origine non linéaire. Mais ce ne sont pas les seules ondes d'origine non astronomique. En effet d'autres phénomènes qui, s'ils sont périodiques, peuvent générer des ondes périodiques qui s'inséreront

## Les équations générales de la marée

---

dans le spectre. Ainsi, le vent établi ou le réchauffement de l'eau par Soleil peut générer des ondes périodiques. Les trois seules ondes d'origine météorologique prises en compte dans l'étude des marées sont  $S_l$ ,  $S_a$ , et  $S_{sa}$ . Elles font aussi toutes les trois parties du potentiel astronomique mais ont des coefficients très faibles. Leurs origines sont donc principalement météorologiques :

- $S_a$  est due aux variations saisonnières des vents d'alizés et des moussons (d'où cette périodicité annuelle) ;
- $S_{sa}$  est due à l'effet stérique c'est-à-dire l'élévation des eaux de surface dues au Soleil qui, en été, réchauffe plus l'hémisphère Nord alors qu'en hiver, il réchauffe plus les eaux de l'hémisphère sud (d'où cette périodicité semestrielle) ;
- $S_l$  est due à des phénomènes d'alternance entre les brises de mers et les brises de terres, d'où son origine solaire.

Nom de Darwin	Nombre de Doodson	Fréquence (°/h)	Période (jours)	Espèce
$S_a$	056.555	0,0410667	365,2594	longue période
$S_{sa}$	057.555	0,0821373	182,6211	longue période
$S_l$	164.555	15,000000	1,0000	diurne

Tableau 7 : Principales composantes météorologiques

## Chapitre 6

# Le modèle hydrodynamique éléments finis de marées

### 6.1 Présentation du chapitre

---

Dans les chapitres précédents, nous avons simplifié la réponse de l'océan à l'excitation du potentiel astronomique en considérant le plancher océanique indéformable et en ne tenant pas compte des effets internes qu'induisent les marées sur les masses d'eau qu'elles mettent en mouvement. Nous allons maintenant tenir compte de tous ces effets supplémentaires afin de corriger le potentiel générateur astronomique pour obtenir le potentiel dit 'potentiel de marée global'. Puis nous nous intéresserons à la formulation hydrodynamique des équations de marées afin de pouvoir les résoudre sur un maillage éléments finis. Nous donnerons alors un aperçu de la modélisation de la marée par notre code de calcul CEFMO (Code Eléments Finis pour la Marée Océanique).

### 6.2 La marée dans le modèle

---

#### 6.2.1 Définitions

Dans le cas de l'étude des marées océaniques, il faut que nous nous fixions un référentiel. En effet, les variations de hauteur d'eau qu'engendrent le potentiel générateur, doivent être données en fonction d'une origine. C'est pourquoi, il faut tenir compte de toutes les corrections à apporter au potentiel générateur astronomique. Ces corrections sont formulées par la suite sous forme de potentiels qui doivent être ajoutés ou retranchés au potentiel générateur astronomique pour obtenir le potentiel de marées qui est à l'origine des dénivellations constatées sur l'ensemble des océans.

### 6.2.2 Marées terrestres astronomiques

Jusqu'à présent la Terre était considérée comme indéformable, ce qui n'est pas le cas en réalité. La force génératrice s'applique aussi sur les parties terrestres de notre globe. La réponse de la Terre à cette excitation du potentiel est statique et élastique, comme si la Terre était une boule d'acier. Aucun courant de fluide ne peut avoir lieu dans la partie solide. Donc, dans le cas de la Terre, la théorie statique des marées développées par Newton peut s'appliquer. En effet, les mouvements des particules de la Terre ne pouvant qu'être très petits sous l'influence de la force génératrice des marées (la matière considérée est solide et non plus liquide), l'équilibre est quasiment toujours atteint. Ce phénomène entraîne donc une élévation des fonds marins. *Love* [1911] a estimé cette élévation en fonction du potentiel générateur des marées :

$$\delta_T = k \frac{\Pi_A}{g} \quad (6.43)$$

avec  $k$  un nombre de Love estimé constant et égal à 0,6.

### 6.2.3 Perturbations dues aux marées terrestres

Comme la Terre est sensible à l'attraction astronomique, la déformation du volume terrestre induit une nouvelle répartition des charges à l'intérieur de la Terre ce qui entraîne une modification du champ gravitationnel terrestre. Ce phénomène est pris en compte par une correction du potentiel générateur. Cette correction est un potentiel  $\Pi_T$  estimé par *Love* [1911] :

$$\Pi_T = h\Pi_A \quad (6.44)$$

avec  $h$  un nombre de Love constant sur l'ensemble du globe terrestre et égal à 0,3.

### 6.2.4 Effets de charges et d'auto-attraction

Au cours du temps, les marées océaniques modifient la répartition des masses d'eau océaniques. Tout comme la marée terrestre, ceci se traduit par la correction de la dénivellation issue d'un phénomène appelé *effets de charge*. *Farrell* [1972] fut un des premiers à étudier l'effet des surcharges dues aux bourrelets d'eau engendrés par les marées océaniques sur la déformation de la croûte terrestre. En développant en harmoniques sphériques la dénivellation relative du niveau de la mer par rapport à la position locale de la croûte terrestre, *Hendershott* [1972] a montré que la dénivellation issue des effets de charge s'écrit au point de coordonnées  $(\lambda, \varphi)$  :

$$\delta_c = \sum_n h'_n \iint_{ocean} G_n(\lambda, \varphi, \lambda', \varphi') \alpha(\lambda', \varphi') d\lambda' d\varphi' \quad (6.45)$$

avec :

- $h'_n$  : nombre de Love pour l'ordre  $n$  du développement en harmoniques sphériques ;
- $G_n$  : fonction de répartition dépendant de la position ;
- $\alpha$  : la dénivellation de la marée due au potentiel astronomique.

La prise en compte de cette perturbation suppose une connaissance *a priori* de la marée océanique si nous voulons garder le caractère explicite du problème. En outre, de même que pour les marées terrestres, cette dénivellation due aux effets de charge modifie le champ de pesanteur, ce qui amène une autre perturbation du potentiel générateur des marées qui se traduit sous la forme d'un potentiel d'auto-attraction [Hendershott, 1972] :

$$\Pi_C = \sum_n (1 + k'_n) \iint_{ocean} G_n(\lambda, \varphi, \lambda', \varphi') \alpha(\lambda', \varphi') d\lambda' d\varphi' \quad (6.46)$$

avec :

- $k'_n$  : nombre de Love pour l'ordre  $n$  du développement en harmoniques sphériques ;
- $G_n$  : fonction de charge de Green dépendant de la position ;
- $\alpha$  : la dénivellation de la marée due au potentiel astronomique.

Avec cette formulation Francis et Mazzega [1990] ont calculé des cartes mondiales du potentiel de charge qui sont utilisées dans notre modèle, en utilisant la solution mondiale de Schwiderski [1980c]. L'expression de la fonction de charge  $G_n$  est donnée dans leur papier.

### 6.2.5 Potentiel générateur total

Hendershott [1972], fut le premier à prendre en compte toutes les corrections du potentiel développées ci-dessus. Le potentiel total des marées que nous devons utiliser dans notre étude s'écrit donc sous la forme :

$$\Pi - g\delta = (1 + k - h)\Pi_A(\lambda, \varphi) + g \iint \alpha(\lambda', \varphi') G(\lambda, \varphi, \lambda', \varphi') \cos \varphi' d\lambda' d\varphi' \quad (6.47)$$

avec :

- $\lambda, \varphi$  : les coordonnées géocentriques du point considéré (longitude, latitude)

- $a$  : le rayon de la Terre;
- $\alpha$  : la dénivellation de la marée due au potentiel astronomique.
- $\Pi_A$  : le potentiel astronomique de marées;
- $h, k$  : les nombres de Love;
- $G_n$  : fonction de charge de Green dépendant de la position.

## 6.3 Equations du modèle hydrodynamique

### 6.3.1 Equations du modèle

La formulation des équations utilisées dans le modèle hydrodynamique CEFMO a été initialisée par *Le Provost* [1986] puis développée dans des travaux ultérieurs [*Le Provost et al.*, 1994]. Nous rappelons ici les principales étapes de la formulation des équations hydrodynamiques utilisées dans le modèle CEFMO. Ces équations sont basées sur les équations littorales de la marée océanique et projetées en coordonnées sphériques. La viscosité horizontale est négligée et la dissipation est supposée avoir lieu dans une couche limite mince près du fond. Les non-linéarités provenant des termes d'advection et de dissipation sont résolues par une méthode de perturbation. Nous obtenons ainsi un système harmonique d'équations quasi linéarisées.

Reprenons les équations littorales de la marée introduites dans le Chapitre 5, et tenons compte des corrections à apporter aux forçages et à la position absolue du fond océanique. Rappelons les différentes hypothèses faites sur le fluide océanique qui nous conduisent aux équations utilisées dans le modèle à savoir que ce fluide est :

- à réponse barotrope (c'est-à-dire que les isopressions et les isodensités sont confondues) et de ce fait homogène ;
- incompressible ;
- parfait en dehors de la couche limite du fond (non visqueux , non turbulent) ;
- régi par une loi de frottement quadratique au fond des océans (cette loi est actuellement considérée comme modélisant le mieux le frottement) et caractérisée par un coefficient de type Chézy ;
- à dimensions horizontales très grandes devant les dimensions verticales (hypothèse des ondes longues) ;
- à vitesse verticale très petite devant les vitesses horizontales.

Dans ce cas, l'équation de continuité est :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0 \quad (6.48)$$

L'équation du moment dans sa forme non conservative est :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}\mathbf{u}) + g\nabla\alpha + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} = \nabla(\Pi - g\delta) - \frac{C_f}{h} \|\mathbf{u}\| \mathbf{u} \quad (6.49)$$

avec :

- $\alpha$  : l'élévation de surface de l'océan ;
- $\delta$  : la topographie du fond océanique ;
- $H$  : la profondeur d'eau moyenne ;
- $h$  : la profondeur d'eau instantanée ( $h = H + \alpha$ ) ;
- $\mathbf{u}$  : la vitesse barotrope horizontale ;
- $\Pi$  : le potentiel global de marée ;
- $\boldsymbol{\Omega}$  : la rotation terrestre avec le paramètre de Coriolis  $f = 2\Omega \sin \varphi$  ;
- $g$  : la constante de gravité ;
- $C_f$  : le coefficient de friction sans dimension de type Chézy.

Dans les chapitres précédents, la linéarisation du coefficient de frottement nous a permis d'obtenir des relations linéaires pour les équations (6.48) et (6.49). Or nous étudions le phénomène des marées qui est une somme de fonctions sinusoïdales élémentaires. A chaque fonction est associée une composante  $k$  du développement du potentiel générateur qui a une fréquence propre  $\omega_k$ . Nous pouvons donc résoudre les équations (6.48) et (6.49) séparément pour chacune des composantes de la marée. Introduisons la notation complexe associée à la fréquence  $\omega_k$  pour les différentes variables (la dénivellation et les deux composantes de la vitesse). Pour simplifier les notations nous écrirons  $\omega$  au lieu de  $\omega_k$  :

- pour la dénivellation :  $\alpha = \alpha e^{j\omega t}$  ;
- pour les vitesses :  $\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mu e^{j\omega t} \\ \nu e^{j\omega t} \end{vmatrix}$ .

En nous plaçant en coordonnées sphériques, à partir de (6.48) nous obtenons pour la dénivellation :

$$i\omega\alpha + \nabla \cdot H\mathbf{u} = F_\alpha \quad (6.50)$$

et à partir de (6.49) nous obtenons pour les vitesses :

$$(j\omega + r)\mu + (r' - f)v + g \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = gF_\lambda \quad (6.51)$$

$$(r'' + f)\mu + (j\omega + r''')v + g \frac{1}{a} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = gF_\varphi \quad (6.52)$$

avec :

- $\mathbf{u}(\mu, v)$  la vitesse barotrope ;
- $F_\alpha, F_\lambda, F_\varphi$  les forçages en dénivellation dépendant de la longitude et de la latitude ;
- $r, r', r'', r'''$  les coefficients de frottement exprimés dans le Tableau 8.

Coefficient	Onde dominante	Autres ondes
r	$\frac{C_f}{H} R$	$\frac{C_f}{H} (R + R')$
r'	$j \frac{C_f}{H} R'$	$\frac{C_f}{H} R''$
r''	$-j \frac{C_f}{H} R'$	$\frac{C_f}{H} R''$
r'''	$\frac{C_f}{H} R$	$\frac{C_f}{H} (R - R')$
R	$\frac{\sqrt{\mu_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{2}} \left( G_{00} + \frac{G_{02}}{2J_1} \right)$	$\frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\mu_1^2 + v_1^2} G_{00}$
R'	$\varepsilon \frac{\sqrt{\mu_1^2 + v_1^2}}{\sqrt{2}} \left( \frac{G_{02}}{2J_1} \sqrt{1 - J_1^2} \right)$	$\frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\mu_1^2 + v_1^2} \frac{G_{02}}{2J_1} \frac{\mu_1^2 - v_1^2}{\mu_1^2 + v_1^2}$
R''	0	$\frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\mu_1^2 + v_1^2} \frac{G_{02}}{J_1} \frac{\mu_1 v_1}{\mu_1^2 + v_1^2} \cos(\chi_1 - \psi_1)$

**Tableau 8 : Expressions des coefficients de frottements quasi linéarisés**

avec :

- $\mu_1$  et  $v_1$  les modules des composantes de la vitesse de l'onde dominante ;
- $\psi_1$  le déphasage en  $\mu_1$  et  $\chi_1$  le déphasage en  $v_1$  de la vitesse de l'onde dominante ;

- $J_1^2 = 1 - 4 \sin(\chi_1 - \psi_1)^2 \frac{\mu_1 \nu_1}{\mu_1^2 + \nu_1^2}$  ;
- $J = \sqrt{\frac{2J_1}{1+J_1}}$  ;
- $\varepsilon = +1$  si  $-\pi < \chi_1 - \psi_1 < 0$  et  $\varepsilon = -1$  si  $0 < \chi_1 - \psi_1 < \pi$  ;
- $G_{00} = \frac{2^{3/2}}{\pi \sqrt{2-J^2}} E(J)$  ;
- $G_{02} = \frac{2^{5/2}}{\pi \sqrt{2-J^2}} \left\{ E(J) + 2 \frac{1-J^2}{J^2} [E(J) - F(J)] \right\}$  ;
- E et F les intégrales de Legendre de première et deuxième espèces.

Ces coefficients dépendent des caractéristiques des ondes majeures d'où la nécessité d'utiliser une méthode itérative pour résoudre le problème.

Afin de simplifier l'écriture de (6.51) et (6.52), reprenons les notations introduites par *Lyard* [1999] et posons :

$$\mathbf{D} = - \begin{bmatrix} r(\lambda, \varphi) & r'(\lambda, \varphi) \\ r''(\lambda, \varphi) & r'''(\lambda, \varphi) \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

$$\mathbf{M}^{-1} = - \frac{1}{gH} \begin{bmatrix} i\omega + r & r' - f \\ r'' - f & i\omega + r''' \end{bmatrix} \quad (6.54)$$

soit après inversion ( $\Delta$  étant le déterminant de la matrice carrée  $\mathbf{M}$ ) :

$$\mathbf{M} = - \frac{gH}{\Delta} \begin{bmatrix} i\omega + r''' & f - r' \\ f - r'' & i\omega + r \end{bmatrix} \text{ avec } \Delta = \begin{vmatrix} i\omega + r & r' - f \\ r'' + f & i\omega + r''' \end{vmatrix} \quad (6.55)$$

Posons  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_\lambda \\ F_\varphi \end{bmatrix}$  le forçage complexe de marées.

Sachant qu'en coordonnées sphériques le gradient de la dénivellation  $\alpha$  est :

$$\nabla \alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial r} \mathbf{i} + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \mathbf{j} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \mathbf{k} \approx \frac{1}{a} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \mathbf{j} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \mathbf{k} \quad (6.56)$$

car les variations de la dénivellation sont supposées très petites devant le rayon terrestre. Nous déduisons de (6.51), (6.52), (6.54) et (6.56) :

$$-gH\mathbf{M}^{-1}\mathbf{u} + g\nabla\alpha = g\mathbf{F}$$

Après simplifications nous obtenons les vitesses :

$$\mathbf{u} = \frac{1}{H}\mathbf{M}(\nabla\alpha + \mathbf{F}) \quad (6.57)$$

Nous pouvons alors remplacer  $\mathbf{u}$  donnée par (6.57) dans (6.50) :

$$i\omega\alpha + \nabla \cdot \mathbf{M}\nabla\alpha = F_\alpha + \nabla\mathbf{M}\mathbf{F} \quad (6.58)$$

### 6.3.2 Système hydrodynamique

Soit  $\Omega$  le domaine de modélisation. Posons  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  :

$$S[\alpha](\mathbf{x}) = (i\omega\alpha + \nabla \cdot \mathbf{M}\nabla\alpha)(\mathbf{x}) \quad (6.59)$$

$$\psi(\mathbf{x}) = (F_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{M}\mathbf{F})(\mathbf{x}) \quad (6.60)$$

Considérant que les conditions aux limites répondent :

- à la condition de *Neumann* pour les frontières fermées  $\Omega_c$  (limites imposées) ;
- à la condition de *Dirichlet* pour les frontières ouvertes  $\Omega_o$  (glissement le long des frontières).

Le système hydrodynamique à résoudre se résume donc par :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{x} \in \Omega, S[\alpha](\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_c, \alpha = \alpha_i \\ \forall \mathbf{x} \in \Omega_o, H\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{M}(\nabla\alpha - \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \end{cases} \quad (6.61)$$

### 6.3.3 Expression du système

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à l'expression du système hydrodynamique dans le cadre de notre étude. Nous pouvons montrer que le système (6.61) peut s'écrire sous la forme [*Le Provost and Poncet, 1978*] :

$$j\omega \cos\varphi + \frac{\partial}{\partial\lambda} \left( \frac{B}{\cos\varphi} \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} - D \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \frac{A}{\cos\varphi} \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} - C \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} \right) = F \quad (6.62)$$

avec  $A, B, C, D$  et  $F$  des fonctions des coefficients de frottements  $r, r', r''$  et  $r'''$  (cf. Tableau 8), de la fréquence  $\omega$  de l'onde de marée considérée, de  $f$  le paramètre de Coriolis et de  $F_\lambda$  et  $F_\varphi$  les forçages de la marée globale. L'expression de ces coefficients est :

- $A = \frac{j\omega + r}{E} ;$
- $B = \frac{j\omega + r'''}{E} ;$
- $C = \frac{r'' + f}{E} ;$
- $D = \frac{r' - f}{E} ;$
- $E = \frac{\alpha^2}{gH} [\omega^2 - f^2 + f(r' - r'') + r'r'' - rr''' - j\omega(r + r''')] ;$
- $F = F_\alpha \cos \varphi + \frac{a}{g} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (BF_\nu - DF_\mu) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (AF_\nu - CF_\mu) \cos \varphi \right].$

La formulation elliptique de (6.62) nous assure l'existence et l'unicité de la solution, suivant la formulation variationnelle proposée par *Le Provost et Poncet* [1978]. Mathématiquement, la résolution de ce type de problème peut se faire par éléments finis [*Le Provost and Poncet*, 1978].

## **6.4 Résolution par les éléments finis**

---

### **6.4.1 Principe**

Initiés par les travaux de *Schwiderski* [1980a; 1980b; 1986], la plupart des modèles hydrodynamiques globaux de marées océaniques sont résolus sur des grilles éléments finis à pas constant en latitude et en longitude, ce qui empêche un raffinement dans certaines spécificités. Dans notre cas, la résolution des équations définies précédemment se fait sur des grilles éléments finis. Dans notre cas, les éléments finis sont des triangles. En définissant un maillage constitué de ces éléments finis, il est possible de calculer les inconnues des équations de la marée : la dénivellation et les deux composantes de la vitesse de marée. De nombreux travaux préliminaires ont été nécessaires à la mise en place de la résolution globale de la marée par les éléments finis [*Cancel*, 1993; *Genco*, 1993; *Lyard*, 1992; *Poncet*, 1979; *Rougier*, 1979; *Vincent*, 1979].

## 6.4.2 Discrétisation

### 6.4.2.1 Maillage du domaine

Pour les calculs des solutions FES à l'échelle globale, les équations sont résolues sur un maillage global éléments finis. Dans un premier temps la génération d'un maillage étant longue, nous avons réutilisé le maillage élément finis couvrant globalement les océans. Ce maillage fut construit aux cours de différentes thèses [Canceil, 1993; Genco, 1993; Lyard, 1992]. Chacun des auteurs a entrepris des portions de maillage. L'assemblage de ces différentes portions forme le maillage global (cf. Figure 45 du Chapitre 10). Les maillages ont été réalisés avec le mailleur *Trigrid* [1990]. Chaque élément triangulaire du maillage est Lagrange P2, c'est-à-dire que les dénivellations sont calculées pour les 3 sommets des triangles ainsi que pour les 3 milieux des côtés d'un triangle, soit 6 nœuds en tout. Les vitesses sont calculées aux 7 points de Gauss ce qui permet d'obtenir une interpolation des vitesses et de les dériver pour en déduire la dénivellation aux nœuds. La Figure 12 représente un des éléments triangulaires du maillage. Les points noirs représentent les 6 nœuds de calculs et les points rouges, les points de Gauss.

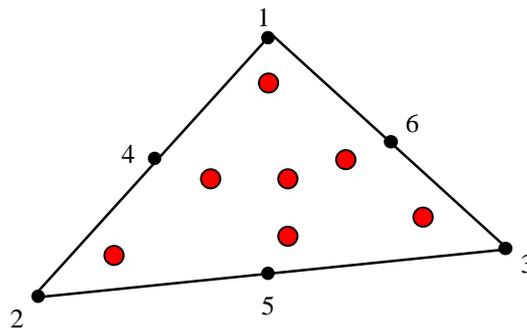


Figure 12 : Élément triangulaire Lagrange P2

Pour bien représenter une onde de marée, *Le Provost et Vincent* [1986] ont proposé un critère local déterminant la distance maximale  $\Delta L$  admissible entre deux nœuds du maillage :

$$\Delta L = \frac{2\pi}{15\omega} \sqrt{gH} \quad (6.63)$$

avec :

- $\omega$  : la fréquence de l'onde de marée considérée ;
- $g$  : la pesanteur supposée constante ;
- $H$  : la profondeur des fonds océaniques au nœud de l'élément triangulaire.

Ainsi, nous avons de grandes mailles pour des eaux profondes et des mailles resserrées pour les zones littorales. Ce critère variant peu avec la pulsation de l'onde considérée, c'est l'onde  $M_2$  qui

a été choisie pour déterminer les tailles des mailles qui sont identiques pour toutes les ondes. L'ordre de grandeur de la distance entre deux nœuds P2 est d'environ 10 kilomètres le long des côtes et d'environ 200 kilomètres en plein océan.

#### 6.4.2.2 Ressources informatiques

Etant donné le nombre de points des maillages éléments finis, les ressources informatiques doivent être importantes pour résoudre les équations de l'hydrodynamique. Les calculs de la dénivellation nécessitent par conséquent une grande place en mémoire vive et du support disque pour effectuer les sauvegardes. C'est pourquoi tous les calculs sont effectués sur les supercalculateurs Cray de l'IDRIS (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique). Cet institut fondé en novembre 1993 est le centre majeur du CNRS pour le calcul numérique intensif de haute performance.

Nous donnons pour information, les caractéristiques des supercalculateurs utilisés dans le cadre de notre modélisation hydrodynamique. Les supercalculateurs sont deux machines vectorielles Cray dénommées C94 et C98.

- Processeurs :
  - 4 (C94) et 8 (C98) processeurs vectoriels constructeur ;
  - 1 Gflops crête par processeur (375 Mflops en moyenne) ;
  - fréquence d'horloge de 250 MHz ;
  - Entier et Flottant 64 bits Cray ;
  - 8 registres vectoriels de 128 mots par processeur.
- Mémoire :
  - 256/512 Mmots soit 2/4 Go utilisables par tous les processeurs ;
  - Mémoire segmentée en 256/512 bancs (accès uniforme à mémoire).
- Disques :
  - HOME : 14 Go (30 Mo par groupe en moyenne) ;
  - WORKDIR : 16 Go (1,4 Go par groupe) ;
  - TMPDIR : 30 Go sur C94, 60 Go sur C98 et 17 Go maxi pour un travail batch.

## **6.5 Bilan**

---

Nous avons mis en place les équations de l'hydrodynamiques appliquées aux marées. La résolution de ces équations sur un maillage éléments finis nous permet maintenant de produire des solutions de marées globales à l'échelle mondiale. Notons que cette méthode de calcul a servi de base à la production des solutions de marées FES94.1 [Le Provost *et al.*, 1994] et FES95.2 [Le Provost *et al.*, 1998]. Nous allons voir dans la suite quels sont les paramètres à réviser afin d'améliorer encore la précision de la modélisation des marées par la méthode des éléments finis. Ainsi, nous allons introduire la notion d'assimilation de données afin de tenir compte des informations de terrain grâce à la mesure marégraphique et la mesure altimétrique. En effet, si ces données sont extrêmement intéressantes pour la validation des modèles de marées, elles sont tout aussi intéressantes pour l'amélioration des modèles par l'assimilation. C'est pourquoi, dans la partie suivante, nous nous intéressons tout particulièrement à ces types de mesures afin d'en détacher les qualités et les défauts. Ainsi pourrons les utiliser afin de produire nos futurs modèles.